第一章　突变理论的由来

§1.1　突变现象

客观世界存在着两种基本不同的变化方式：一种是光滑的、连续的不断的变化，如有机体的连续生长、地球绕太阳连续不断地旋转、流体的连续流动、气温的连续变化等等，这种光滑的、连续的渐变现象，在数学上早已成功的运用微积分的方法得到了圆满地解决。我们可以说，经典的微积分是连续变化的数学模型；另一种变化是不连续的飞跃，如岩石突然断裂，桥梁突然断塌，水突然沸腾，地震突然发生，细胞的分裂，胚胎的变异，如此等等，不胜枚举。只要我们稍加注意和分析，就会发现他们所具有的共同特点。即都是一些事物从性状的一种形式突然地跳跃到根本不同的另一种形式的不连续变化，都包含着突然变化的瞬时过程，我们把这种作用称之为“突变”。也有人译为“灾变”，因为“突变”一词，其英文是Catastrophe，源于希腊文Katastrophe′，意指巨大的、灾难性的突然变化。不但自然界存在着许多突变现象，即使在生物界和社会科学领域内也有很多突变现象。比如一只既惊又恐的狗似乎要咬人，但只要稍加恐吓就会掉头逃跑，而一只似乎要逃跑的狗，因涉及到被逼迫的刺激而突然地放弃逃走的念头

转为进攻（即所谓狗急跳墙）。一个国家对另一个国家的威胁变得太大，突然地造成不宣而战；市场上稳定的经济增长，因受到许多涨落的影响而突然地价跌千丈等等，突变现象不一而足。

§1.2 突变理论的诞生

由于突变现象而造成的不连续变化过程，把系统的状态（或行为）空间变成不可微分的，因此对突变现象的描述和解决，传统的微积分方法也无能为力。那么，有没有用来描述和解决自然界与社会现象中各种飞跃和不连续过程的数学理论和方法呢？这早就引起了数学家的关注和研究。例如，将不连续函数展成傅里叶级数，用偏微分方程描述激波形成等都属这类问题，对某些突变现象这些方法也是无法解决的。1958年国际菲尔兹(Fields)数学奖获得者，法国巴黎高级科学院数学教授雷内·托姆（R·Thom）博士，在总结和继承前人研究的基础上，于1968年发表了有关突变理论的论文：“生物学中的拓扑模型”，1972年又出版了《稳定性结构与形态发生学》的名著，被认为是突变理论的第一本专著，该书用拓扑学、奇点和稳定性的数学理论来研究自然界和社会现象中的各种形态、结构的非连续性突变，系统地阐述了突变的理论，从而奠定了突变理论的基础，这标志着突变理论的正式诞生。以后十多年来，经过英国数学家，英国瓦维克(Warwick)大学数学研究所所长，皇家学会会员齐曼(E.C.leeman）教授等人从理论到实际应用方面的大力改进和完善，遂使突变理论成为数学中最年轻的分支之一，轰动了全世界，从而引起了国际数学家、哲学家、生物学家、社

会科学家的广泛注意。从美国的《纽约时报》到日本的通俗周刊杂志等都在介绍这个新兴的理论，有关突变理论的文献与日俱增，英国的研究可谓“一马当先”，大不列颠百科全书更誉其为“牛顿，莱布尼兹以来，数学界的又一次最伟大的智力革命”，因为牛顿，莱布尼兹用他们的理论（微积分理论）解释了所有连续的、渐变的现象，而托姆的突变理论则解释了所有不连续的、突变的现象。

在我国，由于众所周知的“十年内乱”，对突变理论的研究着手较晚，一些杂志从1978年才开始零星的介绍有关的突变理论，但也有所应用。例如，微分对策是在军事上研究追逃问题的一个新兴的运筹学分支，在微分对策中有一种称为壁垒(harrier)的奇异曲面，它的存在导致了值函数的不连续，最新研究结果表明，在微分对策中存在着对策突变，因此有些对策论和控制论学者，主张采用托姆的奇点理论和突变理论对微分对策中所产生的不连续性和奇异性进行分类及研究。这虽然是刚刚开始的尝试，但也不失为一个可喜的开端。

第二章　突变理论的数学基础

目前，关于突变理论的研究，大致可以分为三个方面，首先是研究它的数学基础，其中包括稳定性的严格的数学表达，托姆分类定理的推导，它们都属于微分拓扑学和奇点理论；其次是给出突变过程的势函数形式后，讨论相应模型，特别是控制空间中突变集的几何形状，这称为突变理论的几何研究。对于托姆提出的七种基本突变模型，它们的几何研究相对简单，但是当控制变量和状态变量组成的维数很高时，就不得不运用电子计算机了，这是突变理论在近来发展很快的新领域；第三，突变理论研究中最活跃也是争议最大的领域，就是它的应用。本书也是从这几个方面来开展研究的。

§2.1　奇点理论

马克思曾说过：“任何一门科学只有在充分地运用数学的时候才算达到了真正完善的地步”。突变理论的数学基础是相当宽厚的，有些内容还很坚深，它涉及到现代数学中的群论、流形、映射的奇点理论，特别是拓扑学方法，我们简要介绍一些突变理论的数学基础的基本情况，首先，突变理论作为不连续现象的数学模型，仍然需要一些微积分的基本思

想。

1980年，英国数学家桑德斯（P. T. Saunders）出版了《突变理论入门》（An Introduction to Catastrophe）一书，该书开头就明确指出："作为数学的一部分；突变理论是关于奇点的理论"。什么是奇点？所谓奇点是相对于正则点而言的，一般说来，正则点是大量的，而奇点则是个别的。但因为奇点奇特个别，因而它才在数学中占有突出的地位。

突变理论的主要之点，在于考察某种系统或过程，从一种稳定态到另一种稳定态的跃进，什么叫稳定态？所谓稳定，是指系统或过程某一状态的持续出现，外界干扰可能使系统偏离某一状态，产生不稳定。而干扰消除又恢复原态，继续出现稳定，因此稳定性不仅指事物不变，而且还指事物有一定的抗干扰的能力，或者说当干扰使事物偏离稳定态时，事物能依靠某种作用回到稳定态，不倒翁的直立状态就是一个稳定态，不论干扰从那个方向使它发生偏离，它都能回到这一状态。

我们知道，一个系统所处的状态可以用一组参数来描述，当系统处于稳定态时，标志该系统状态的某个函数取唯一的极值（如能量取极小，熵取极大等等），当参数在某个范围内变化，该函数有不止一个极值时，那么该系统必定处于不稳定状态，所以，从数学的角度考察一个系统是否稳定，常常要求出某函数的极值。而求极值必先求函数的导数为零的点。使导数值为零的点就是最简单的奇点，或称为临界点。如果设函数为$F_{uv}(x)$，其中u, v为参数，那么，求函数$F_{uv}(x)$的临界点就是求微分方程的解，当给定u, v的值时，

$$\frac{d}{dx}F_{uv}(x)=0$$

就可得到一个或几个临界点x，因此，临界点x可以看作是参数u，v的单值或多值函数，把这个函数记为$x=l\ (u,v)$，显然，这样的函数，在几何上可以确定一个三维欧氏空间，即 (u,v,x) 中的一个曲面，也就是临界点的集合，并称此曲面为临界曲面，使函数取极值的点叫稳定点，临界点不一定是稳定点，所以临界点可能使系统稳定或不稳定。

为了说明系统的稳定和不稳定，我们现在举一个通俗实例。

用大拇指和中指夹持着一段具有适当长度和有弹性的钢丝，并把它看成是一个系统，使其向上弯曲（见图 2.1），然后用力压钢丝使其变形，如果继续加大外力，当达到一定程度时，钢丝就会突然向下弯曲，这是生活中常见的一种突变现象，它有两种可能的稳定状态，即上弯和下弯。状态由两个参数决定，一是手指夹持的水平方向的力，另一个是对钢丝的垂直方向的压力，假若设想，只有水平的挤压力且钢丝向上弯曲时，它的内能处于极小值，是稳定状态，当垂直方向外力加到一定程度，钢丝的内能变得相当大，很不稳

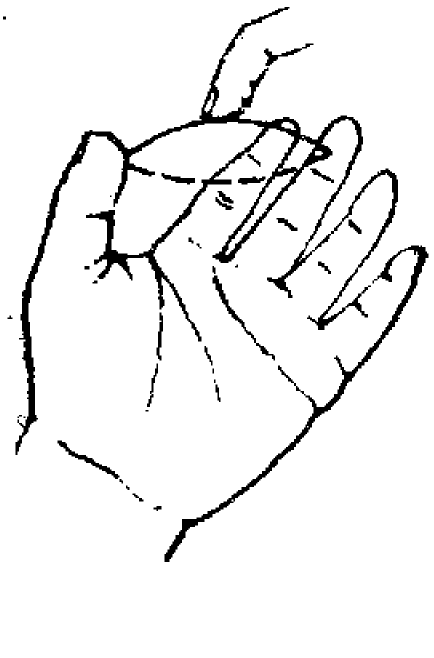


图2.1

定，这时再稍加外力，钢丝的内能就突然地减少，急剧变为

下弯，又处于新的稳定态，而钢丝的内能又处于极小值。当水平和垂直方向的力都为零时，钢丝蓄积的内能才最小（注意，极小值不一定是最小值），这就是一个动力学系统，我们可以用数学方法来描述它。系统的状态受水平挤压力 a 和垂直荷载 b 这两个因素所制约，其内能函数是 F，它和位移 x 有关（x 是衡量钢丝上弯和下弯程度的一个量），所以研究钢丝稳定或不稳定就是研究函数 $F_{ab}(x)$（a、b 为参数）的极小值变化问题，函数 $F_{ab}(x)$ 常称为位势函数，或简称为势函数。

若系统的状态可用 m 个参数，n 个变量 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的函数 $F_{u1\cdots vm}(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 来刻画，则问题要复杂得多。因为变量不止一个，求多元函数的极值要用偏导数，不能只解一个方程 $F'_{uv}(x)=0$，而要解一个偏微分方程组，即临界点是满足偏微分方程组。

$$\frac{\partial}{\partial x_2} F_{u1,\cdots um}(x\ , x_2 \cdots, x_n) = 0$$

或简写为

$$\nabla_x F = 0$$

和

$$\Delta \equiv \det\{H(v)\}$$

的点，其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$ 仅就 x 而言，det 代表行列式（determinant），$H(v)$ 是 v 的海赛（Hessen）矩阵，所谓海赛矩阵就是以下的二阶偏导数矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

不过这时临界点所构成的临界曲面是$n+m$维空间中的高维曲面，图形画不出来，光凭直观简直无法想象。然而托姆是一位出色的拓扑学家，对高维曲面的拓扑性质有精辟的见解，因此这一困难被托姆解决了，找出了它们的标准式，这就是著名的托姆分类定理（其内容见下一章）

我们以后还要用到鞍点这一概念，什么叫鞍点？例如对二元函数

$$f(x,y)=x^3+y^2-3xy+1$$

来说，令偏导数

$$f'x=3x^2-3y=0 \qquad f'y=3y^2-3x=0$$

得方程组 $\qquad x^2-y=0, \qquad y^2-x=0$

该方程组有两个解：$x_1=y_1=0, \quad x_2=y_2=1$

我们来讨论在两个临界点P_1（0,0），P_2（1,1）处，差$f(x,y)-f(0,0)$及$f(x,y)-f(1,1)$的符号，在点$P_1(0,0)$处，我们有

$$f(x,y)-f(0,0)=x^3+y^3-3xy \tag{a}$$

差(a)的符号并不保持不变，即离P_1任意近处有两种类型的点：对某些点差(a)是正的，对于另一些点差是负的。例如，如果点$P(x,y)$自直线$y=x$上取出，则差(a)等于$2x^3-3x^2=$

$x^2(2x-3)$，在点P_1的近旁（当$x<\frac{3}{2}$时），这个差是负的；如果点$P(x,y)$自直线$y=-x$上取出，则差(a)等于$x^3-x^3+3x^2=3x^2$，这个量永远是正的。因差(a)的符号并非保持不变，所以在点$P_1(0,0)$函数$f(x,y)$没有极值，而在该点附近$f(x,y)$形似马鞍，故称点$P_1(0,0)$为鞍点。显然，鞍点不是极值点，但可以证明函数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy+1$在点$P_2(1,1)$处有极小值，故$P_2(1,1)$不是鞍点。

§2.2 平衡曲面和分歧点集

在突变理论中，我们把可能出现突变的那些量称为状态变量或内部变量，而把引起突变的原因，连续变化的因素称为控制变量或外部变量。如在水由液体转化为气体的相变模型(称为气－—液相变模型)中，温度T和压强P是引起水突变原因的连续变量，故为控制变量，水的密度则为水的沸腾过程的状态变量，密度高的状态对应着液态，密度低的状态代表着气态。

假定系统在任何时刻的状态都可以完全由给定n个状态变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的值来确定，这里n是有限的，但可以很大；同时还假定系统受m个独立变量$(u_1,u_2\cdots,u_m)$的控制，即这些变量的值决定了x_i的值，但并不完全唯一，我们假定m比较小，通常不大于5。

设系统的动力学可由一个光滑的势函数导出；又设给出势函数V，用方程，

$$\nabla_x V=0$$

定义其平衡曲面M，其中下标x表示梯度仅就变量 x 而言。这个曲面M由V的全部临界点构成，即由系统的全部平衡点（稳定的或其他的）构成，可以通过数学方法证明M是一个流形，即是一个性态很好的光滑曲面。定义奇点集 S 是由V的全部退化临界点组成的M的一个子集。这些就是满足$\nabla_x V=0$和$\nabla\equiv\det\{H(V)\}=0$的点。$S$在控制空间 C 中的投影称为分歧点集。求分歧点集的方法，可通过由S的定义方程消去全部状态变量的方法而得到；分歧点集是 C 中所有使V的形式发生变化的点的集合。

§2.3 拓扑学方法

事实上，利用数学方法研究突变现象由来已久。早在十九世纪末，法国杰出的大数学家庞加莱(Ponincare′)在非线性常微分方程的定性理论中，就应用拓扑学方法研究过突变现象，从数学观点来看，突变现象还有另外一个名字，叫做"不稳定奇点"。庞加莱当时是用拓扑学方法来研究奇点的。为了便于理解突变理论的实质和来龙去脉，我们要大致说一下拓扑学方法。所谓拓扑学，原是英文topology的译音，研究的对象是多维空间内的曲面，我们假想在一块橡皮上画一个圆A，再把橡皮扭歪、拉伸、压缩，但不要折断，也不要重迭，这时A已变成一个可能是歪歪扭扭的图形B，从A到B叫做橡皮变形，A和B的形状已很不相同，但是图形A的某些性质却是保持不变的，A上的每一个点都变成B上的每一个点，不会两点变成一点，也不会一个点变成两个点，这叫做一一对应。此外，A上的两个非常接近的点

a_1, a_2，变成B上的两个点b_1、b_2，也非常接近；反之，B上的两个非常接近的点，原来在A上也非常接近，这叫做双方连续。凡一一对应且双方连续的变换叫做拓扑变换，按微分拓扑的术语来说，就是微分同胚。拓扑学就是研究几何图形在一对一的连续可微变换下保持不变的性质的一个几何分支。人们利用拓扑变换可以把大部分生物加以分类，例如1961年，生物学家达尔西·汤普森（Thompson）研究形态发生学发现，若把一种鱼画在直角坐标网络中，而后施以简单的拓扑变换，表明几种鱼之间的亲属关系就相当于在一块橡皮上得到的各种变形（如图2.1所示），所以从历史上看，突变论产生于数学和生物学，这并不是偶然的。

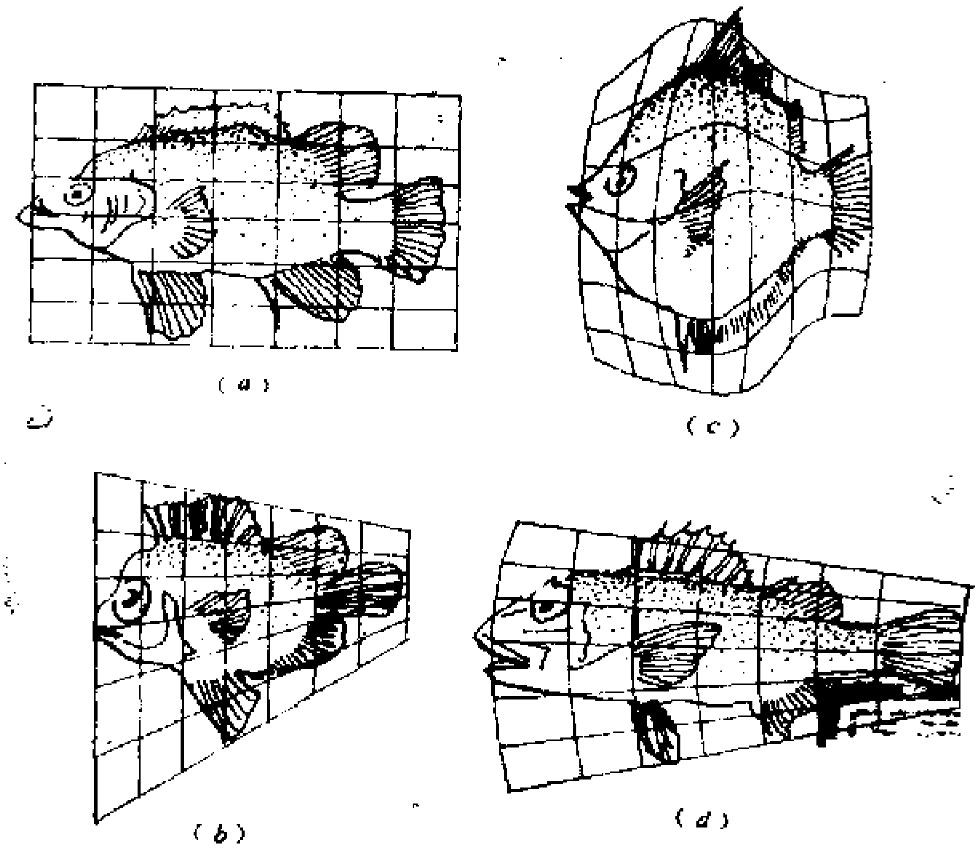


图2.2 上述四图均取自达尔西 汤普森(1[illegible])文

突变理论的第一篇论文是关于形态发生学的，而且突变理论的创始人托姆与庞加莱恰好都是法国的拓扑学专家，他们的拓扑学思想原是一脉相承的，托姆的突变理论里所引用的例子，大都是庞加莱当年所处理过的，他（托姆）的主要贡献在于以拓扑学、奇点理论为工具，通过对稳定性构造的研究，说明了自然界和社会现象中，有的事物不变，有的渐变，还有的则是突变，从而为突变现象建立了一系列新的数学模型，即某些特定的几何形状，用以解释自然界和社会现象中所发生的大量的、不连续的突变过程，使庞加莱原来提出的问题得到了更新、更全面的解释。因而，人们认为托姆的突变理论是数学上颇为新颖的成果，是一个创新。

由此可知，突变理论的提出并不是什么“突变”，更不是那一个天才人物发现的奇想，它扎根于相当宽厚而高深的数学基础之中，所以，突变理论的数学基础是无可置疑的。

第三章　初等突变

§3.1　初等突变的种类

假定系统的动力学可以由一个光滑的势函数导出，托姆用拓扑学的方法证明了，可能出现性质不同的不连续构造的数目并不取决于状态变量的数目（这可能很大），而取决于控制变量的数目（这可能很小），按照托姆突变理论的分类定理，自然界和社会现象中的大量不连续现象，可由某些特定的几何形状来表示。只要控制因子（参量）的个数不超过5，那么按某种意义的等价性分类，总共有11种突变类型，但发生在三维空间和一维时间的四个因子控制下的形形色色的初等突变，概括起来只有如下表所示的七种性质不同的基本类型，而且其中没有一种牵涉到两个以上的状态变量（对后者当然是指可能这样地选择一组n个状态变量，使得其中与不连续性有关的不会多于两个），这些数学模型具有高度的概括性和普遍性，其证明是相当困难的，但掌握证明的结果却比较容易，“基本类型”本身是可以理解的，并且可以不管其证明而直接应用于其他的一些学科中，事实上大部分问题中最常使用的还仅仅是七种基本类型中的二、三种。这七种类型的初等突变，按其几何形状分别被称为折迭型突变(fold cotastrophe)、尖点型突变(cusp catastrophe)、燕尾型突变(swallowtial catastrophe)、蝴蝶型突变

(butterfly catastrophe)、双曲型脐点(hyperbolic umbilic catastrophe)、椭圆型脐点(elliptic umbilic catastrophe)、抛物型脐点(parabolic umbilic catastrophe)。列表如下：

初等突变类型表

突变类型	参数个数（控制变量）	变量个数（状态变量）	势函数
折迭型	1	1	x^3+ux
尖点型	2	1	x^4+ux^2+vx
燕尾型	3	1	$x^5+ux^3+vx^2+wx$
蝴蝶型	4	1	$x^6+tx^4+ux^3+vx^2+wx$
双曲脐型	3	2	$x^3+y^3+wxy-ux-vy$
椭圆脐型	3	2	$\frac{1}{3}x^3-xy^2+w(x^2+y^2)-ux+vy$
抛物脐型	4	2	$y^4+x^2y+wx^2+ty^2-ux-vy$

§3.2 初等突变的几何形状

现在，我们画出这七个突变类型的几何形状。

1. 折迭型突变

在以上七种突变类型中，最简单的是折迭型突变，它的势函数是

$$V(x)=x^3+ux$$

其中x是状态变量，u是控制变量，故相空间是二维的，这个函数的临界点是方程$V'=0$，即

$$3x^2+u=0 \tag{1}$$

的解，平衡曲面退化为$x^2=-\frac{1}{3}u=a$

奇点集S也是满足方程

$$V''(x)=6x=0 \tag{2}$$

的M的一个子集，即一个点(0,0)，分岐点集B是奇点集S在控制空间(即直线$x=0$)上的投影，因此也是一个点$u=0$，上述讨论可见图3.1。

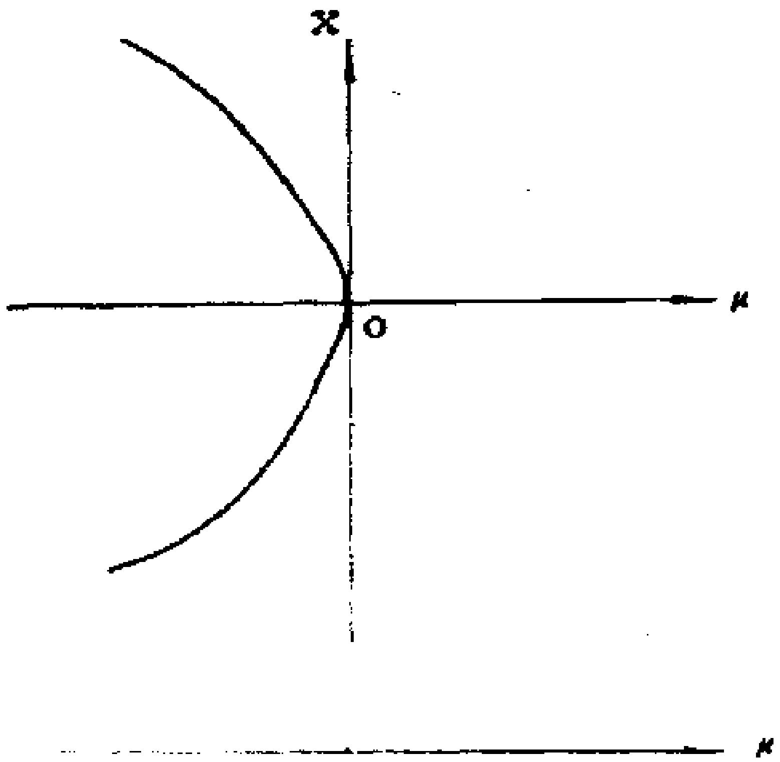


图3.1 折迭突变的平衡曲面和分岐点集

分岐点集把控制空间分成两个区域，即正x轴和负u轴，如果$u>0$，由方程(1)可见，它无实数解，这时V没有临界点；如果$u<0$，容易看出，V有两个临界点，一个极小点和一个极大点，从而有两个平衡点，即一个稳定平衡点和一个不稳定平衡点。在B上(即相当于$u=0$时)，它们合并成一个拐点；如果一个系统的势函数是这个V，则当$u>0$时就不能持续稳定，我们把这一点表达为：在u轴上仅有的可能状态为空状

态。

因此，可以说，折迭型突变的“控制空间”是一条直线，“投影”只是该线上的一个点，状态（或行为）为空间的一根抛物线，其中一半代表稳定状态，另一半代表不稳定状态。

2. 尖点型突变

当控制变量有两个时，最简单的突变模型都是尖点型。尖点型突变的应用最广，它的临界曲面也容易构造，且几何直观性强，故以之为例，做重点分析。

（1） 尖点突变的几何形状

尖点突变，托姆又称为黎曼——雨果尼奥特（Rienan—Hugonioc）点突变，它的势函数是

$$V(x)=x^4+ux^2+vx$$

状态变量是x，控制变量有两个，即u和v，故相空间是三维的，这个势函数的临界点是方程

$$V'(x)=4x^3+2ux+v=0 \qquad (3)$$

的解，故平衡曲面M也由方程（3）给出，因为（3）是一个三次式，由代数学上我们知道，它或者有一个实根，或者有三个实根，实根的数目由判别式

$$\Delta=8u^3+27v^2$$

決定。如果$\Delta\leqslant0$，则有三个实根，否则，只有一个实根。除非$\Delta=0$，根各不相同，而$\Delta=0$时，如果u和v均非零，两个根相同，如果u和v均为零，则所有三个根都相同。

我们可画出曲面$4x^2+2ux+v=0$，如图 3.2 所示。

假若我们设想系统的状态是以x，u，v，为坐标的三维空间的一个点来代表的，则相点必定总是位于曲面上，事实

上，它必定总是位于曲面的顶叶或底叶。因为中叶对应于不稳定平衡。

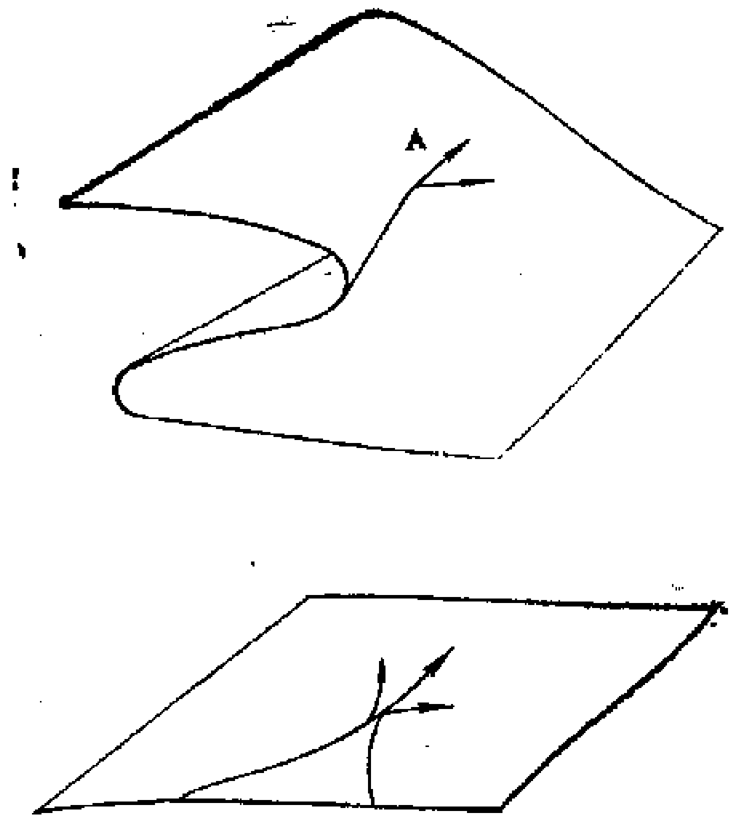


图3.2 尖点突变的平衡曲面和分歧点集

奇点集S也是满足方程

$$V''(x) = 12x^2 + 2u = 0 \tag{4}$$

的M的子集，由(3)和(4)式消去x，得到

$$\Delta = 8u^3 + 27v^2 = 0$$

（上式左端就是上面所介绍的判别式），从而找到分歧点集（即平衡曲面的折痕是u—v平面上的投影），如果相点恰好在曲面终止的边缘上（曲面回折面形成中叶处），则它必定跳跃到另一叶上，这引起x的突变。尖点之中有两个极小点，

它们被一个极大点分隔，而尖点之外则只有一个极小点（见图3.2)。

顺便说一句，对于所有初等突变，并无公认的记号，例如对尖点突变，有一些人把V写成$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ux^2+vx$，使$M$的方程中没有数字因子，一般是遵照齐曼的写法。本书也是如此写法。x和x^2的系数分别被称为正则因子和剖分因子：当$u>0$时，v的变化只引起x的光滑变化，我们可以称之为正则性态，但当把u减少到负值时，我们就“剖分”子M'，从而会出现对x的不连续性，这说明了正则因子和剖分因子这两个名称所反映的事实。

（2） 尖点型突变的典型例子

下面举例来说明尖点型突变

气-液相变模型是大家都比较熟悉的，多少年来，沸腾和冷凝现象就一直吸引着我们。大家都知道，在一个大气压下，水被加热到100℃即由液体转化为气体，这是一个突变，水的密度ρ是状态变量，控制变量有两个，即时间T和压强P，故气-液的相变模型可用点型突变来描述（图3.3），我们用ρ、T、P三个变量组成一个三维状态空间，温度F和压强P用两个水平轴表示，它们确定的平面称为控制平面，与控制平面垂直的轴表示水的状态ρ。水的密度变化可用一个特殊的曲面表示，即模型中具有折迭的那个曲面叫状态（或行为）曲面。曲面上的每一个点表示在一定的温度、压强条件下水的密度。图3.3中曲面奇特的地方在于它有一个平滑的折迭，折迭上叶代表液态，下叶代表气态。整个曲面由液态高密度区往气态低密度区倾斜。说明随着温度升高及压力降

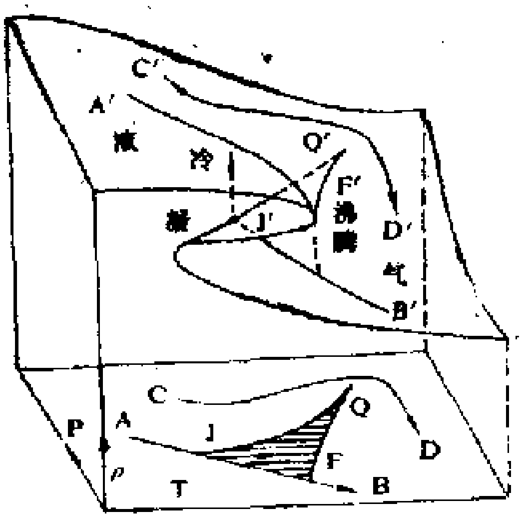


图3.3 尖点型模型

低，水的密度变小。折迭越向后越窄，最后消失在三层汇合起来的那一点Q上。正是这个折迭给出了模型最令人感兴趣的特性。突变理论证明了除折迭的中间那一叶，整个曲面都表示密度的稳定状态。我们将这个折迭区投影到底平面（即控制平面）上，得到一个尖角形的区域JQF，它的顶端是尖的，因此称这个模型为尖点型突变。

这个有折迭的光滑连续的状态曲面，为什么可以说明突变现象呢？现在我们设想温度与压强沿AB方向连续变化，可以看到在相应的状态曲面上，水的密度沿曲线$A'F'B'$变化，在起初$A'F'B'$阶段，水的密度在折迭上叶连续下降，表示水的密度是在渐变。但到了折迭的边缘F'下，温度、压强只要稍顺着AB的方面离开下F点，水的密度值便会突然地跌到曲面下的气态区域，发生了不连续变化，这就是沸腾现象，它是一次飞跃，一次突变；反之，如果温度与压强沿着AB相反的方向，即BA的方向变化时，可以看到，气态密度在状态曲面下叶$B'J'$的连续逐渐升高，但到了折迭的另一边缘J'，则稳定的连续曲面又中断了，密度值突然地上升到状态曲面上升的液态区域，发生了不连续变化，这就是冷凝现象，也是一次飞跃，一次突变。读者或许已经注意到在折迭区JQF内，状态曲面有上、下两个稳定叶，这意味着在同

一温度、压强条件下，水的密度可能有两个不同的值，表现出气态和液态双重状态。正因为这样，折迭区又叫双值区或两态共存区。

饶有趣味的是，从图3.3我们还可以看出，如果温度、压强沿着CD曲线变化，绕过了尖角形的折迭区，相应的在状态曲面上的密度就沿着$C'D'$平滑连续的变化，不出现飞跃而达到气态区，这就说明了为什么只要温度、压强绕过临界点，在水的气化过程中，液态可以不经过沸腾而通过一系列中间过渡状态连续地变为气体。

在描述狗的行为时，只要在状态曲面的上叶和下叶分别表示"攻击"和"逃跑"，控制变量是"恐惧"和"愤怒"，就可以用尖点型突变来描述"狗急跳墙"的突变。此外，冲击波的形成过程中的突变弹性结构随着负荷越来越增大而最后塌陷，以及上面所说的钢丝的弯曲等都属于受两个变量制约的，因此同样可以用尖点型突变来描述其变化过程。

尖点型突变还能说明为什么经济危机的暴发往往是突变，而危机的复苏又是一种渐变过程，如此等等，不胜枚举。

以上是最易于理解，运用最广泛的"尖点型突变"，总起来说，这种突变的模型是一个三维图形，两个控制变量需要两维，另一维作为反应轴，或称为行为轴，反应轴并不一定只代表一个变量，例如在大脑模型中，大脑的反应可以有几十亿神经元的状态都同时改变，但仍可以用反应轴代表一个综合的反应。

（3） 尖点突变的典型性质

齐曼提出了尖点突变具有五条典型性质：

第一条是突跳的出现，这在上面所举气-液相变模型中已经清楚地看到了，如密度值突然地跌到气态区域而发生了沸腾现象，或密度值突然地上升到液态区域而发生了冷凝现象。

第二条是滞后，即突变不是发生在进入稳定态另一个边缘时才开始出现跳跃，这段间隔就是滞后。例如，让我们看一个生态学的例子，设有鼠、土蜂、三叶草、蛇组成的系统，如鼠多，破坏土蜂窝使土蜂减少，因而三叶草少，蛇也少，这是稳定态，如果人类灭鼠，鼠少，结果蜂多，草多，蛇多，这又是一种稳定态。这时若停止灭鼠，鼠的数量仍会减少（因蛇吃鼠），不会立即向鼠增多方向发展，这就是一种滞后现象，一切存在都有一定的稳定性，一般说来，稳定性越强，滞后也越大，滞后现象是普遍存在的。如突变的原因消失之后，突变的结果仍会持续，要想做一次逆向的突变就需要比有突变更强烈的动因。我国有句“矫枉必须过正，不过正就不能矫枉”的成语，就是针对滞后现象而言的。

第三条是发散，即在某些状态下，只要因子稍微改变，即发生状态的突变变化。在气-液相变模型中的两次突变现象就是这样。

第四条是双模态，即有些突变现象在同一原因的作用下，可以有两种可能的行为，如“狗急跳墙”的突变中，狗的逃跑和进攻，用大拇指和中指夹持一段有弹性的钢丝使其变形的例子中钢丝的上弯和下弯等等。

第五条是不可达性，即在某些状态变量上，不可能实现稳定平衡。

如果我们在一个系统中观察到的突变现象，具有上述特

征的一部或全部，就可以试用尖点型突变拟合观察的结果。

（4） 齐曼突变机构。

齐曼发明了一个突变机构，可用以说明尖点型突变，它的构造很简单，用硬卡纸剪一个直径为一个单位长度的圆盘，将圆盘中心"O"用图钉固定在一个合适的板子上，使圆盘能以"O"点为中心而自由转动。在接近圆盘周边的Q点按上一个图钉，使针尖朝上。把两根橡皮筋套在Q点的图针上，并用第三个图钉固定其中一根橡皮筋的另一端于底板上距圆盘中心为两个单位长度的R点处，橡皮筋的另一端P为自由端，可以在圆板平面上四处移动，整个装置见图3.4。

把自由端用手拉住，让它在圆盘所在的板面上缓慢地移动，此板面叫做控制平面，自由端的端点P叫控制点。每当控制点固定时，圆板就停止在一个位置上，因此圆板的这些位置就是与控制点相对应的系统状态（见图3.4）。如果角$\angle ROP$用θ表示，则当控制点连续而缓慢地变化时，角θ也随之连续而缓慢地变化，然而，奇特的是，当控制点在某一适当的位置时，圆盘就发生跳跃式的变化，这就是这个系统发生的突变。

如果把引起跳跃变化的控制点P用铅笔画在平面上，经多次反复试验，如果将每次引起圆盘突转的点都记下来，我们就会发现它们形成了如图3.5所示的那样的内凹曲边钻石线的轮廓线，它具有四个尖角，这个轮廓线图形叫做系统的突变集。如果P在钻石形之外，则圆盘只可能有一个平衡位置，但若P在钻石形之内，则圆盘却有两个稳定平衡位置，其一是Q向左边倾斜，另一是Q向右边倾斜。如果我们仔细操作，还能在两个平衡位置之间找到第三个平衡位置，但它

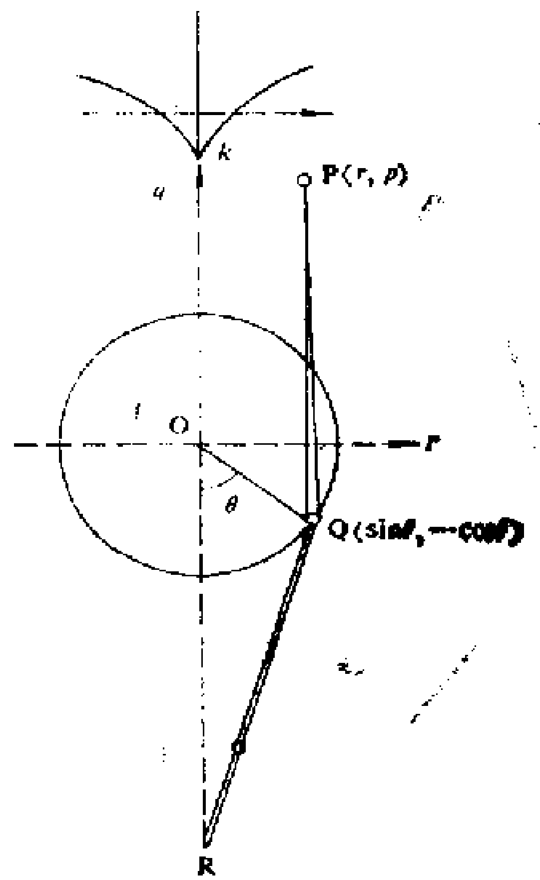


图3.4

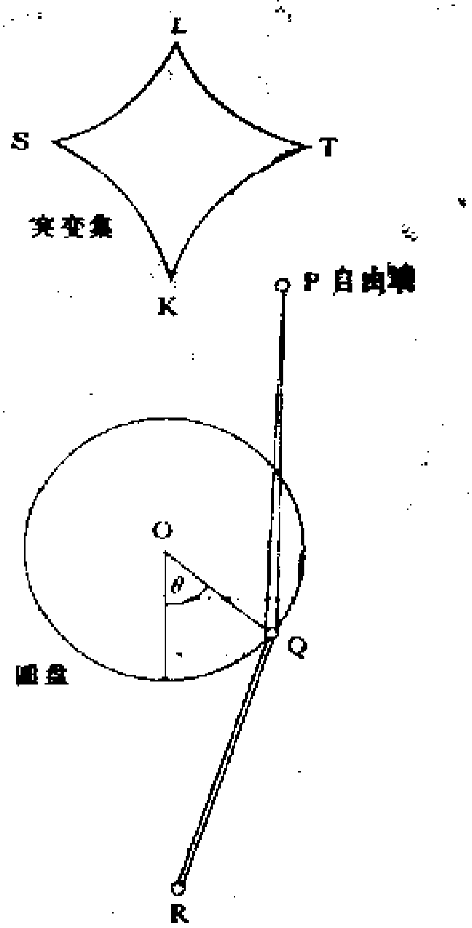


图3.5

是不稳定的。

现在我们对"突变机构"进行简单的分析，以计算橡皮筋的势能V，为此，以"O"为原点建立直角坐标系（如图3.5所示）。此直角坐标系确定了控制平面。

设当控制点为$P(r、p)$时，则由图3.5可见，并利用两点之距离公式，得

$$RQ=\sqrt{(p-\sin\theta)^2+(r+\cos\theta)^2}=\sqrt{5-4\cos\theta}$$

$$QP=\sqrt{(p-\sin\theta)^2+(r+\cos\theta)^2}$$

$$=(1+p^2+r^2-2p\sin\theta+2r\cos\theta)^{1/2}$$

由虎克定律，两根橡皮筋的势能V与两根橡皮筋的伸长

$RQ-1, QP-1$的平方和成正比，若比例常数为1时，则

$$V=(RQ-1)^2+(QP-1)^2$$
$$=(\sqrt{5-4\cos\theta}-1^2)+[(1+p^2+r^2-2p\sin\theta+2r\cos\theta)^{1/2}-1]^2$$

故V是以圆盘的位置θ、控制点的坐标r和p为自变量的三个变量的函数，即$V=(\theta, r, p)$，常把它称为势函数。

我们现在来研究突变集的尖点$K(0, p_0)$的邻域上所发生的突变（如图3.6）

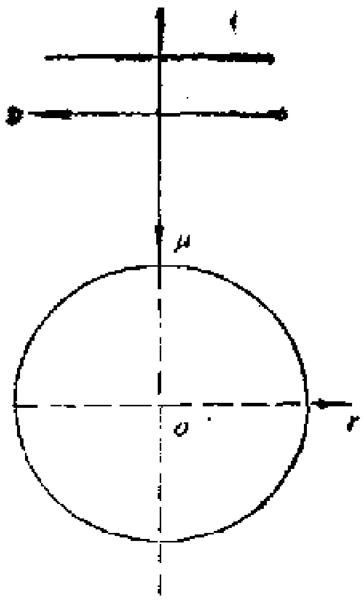


图3.6

当给定r, p值时，$V(\theta, r, p)$仅为θ的函数，我们用$V_{rp}(\theta)$来表示，当θ给出极小值的点称其为极小点；给出极大值的点称为极大点。对尖点$K(0, p)$的邻域的点$P(r, p)$把函数$V_{rp}(\theta)$按θ作泰勒(Taylor)展开，展开式可保留到θ的四次项为止。经过适当地运算及坐标变换可得到以$K(0, p_0)$为坐标原点，以uv为坐标轴的直角坐标系。在这个坐标系中势函数V可以用近似的简单的多项式

$$F=x^4+ux^2+vx$$

来代替。根据托姆定理，我们可以利用F来研究K的邻域中系统的突变，因为x是圆盘的角度θ经线性变换而得来的，所以我们可以把x作为圆盘的角度进行讨论，上式右端正是我们所已熟知的尖点型突变的正则形式。我们已知，这个函数的临界点是$V'(x)=4x^3+2ux+v=0$的解，讨论的结果表

明，只要P在尖点之外，就只可能有一个平衡位置，否则有两个跳跃是离开尖点时发生的，条件是消失的平衡位置，恰好是机构所处的位置。这就是沿着进入尖点的同一路经进入尖点时不会产生跳跃的原因。

整个突变机构的“动态效应”可以用系列图形来表示。见图3.7，每个图形对应于控制点的一个位置。当“控制点”在“尖点”区外时，图形是一个单谷光滑曲线，机构的状态将很快达到谷底，即最小能量状态。当“控制点”进入尖点区边线之后，在原来的谷边又出现了第二个谷，即局部最小能量。随着控制点继续移动，第二个谷逐渐加深，甚至比第一个谷更深，但纸盘仍不能到达第二谷，因为两个谷之间由一个小山峰隔开了，小山峰代表局部最大能量。当“控制点”穿过尖角区的第二根边线时，加深的山谷消失，机构突然旋转，达到了一个新的最小能量位置。

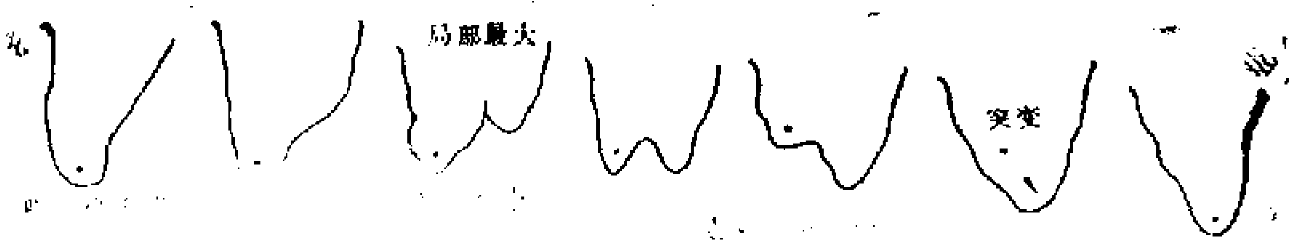


图3.7

另一个比较著名的尖点机构就是波斯顿的“重力突变机构”，这个突变机构的原理类似于儿童玩的“不倒翁”，不倒翁的底部装有一小铁块，重心很低，“不倒翁”因此被拨拉不倒，“重力突变机构”就是这块铁块缓慢地向上和向侧面移动，当铁块移到某一特定位置时，“不倒翁”就会突然跌倒，即发生突变，在数学上可以证明，这个突变就是尖点突变，而这个特

定位置正是数学上所谓的"不稳定奇点"。

（5） 钢丝弯曲

最后我们再回到钢丝弯曲的例子上。用力学的原理可以证明，受水平挤压力和加垂直荷载的弹性梁，其内能函数是位移x的四次多项式：$V_{ab}(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2+bx$，其中$a$、$b$是由水平力和垂直力决定的两个系数（经过适当选择常数，三次项可以消去），于是首先求$V_{ab}(x)$的临界点，即解方程 $V'_{ab}(x)=x^3+ax+b=0$。这是一个三次方程，当(a,b)给定后，它有三个根，又可分为两种情形：（1）一个实根和两个复根，这时$V_{ab}(x)$有一个极小值，是稳定状态；（2）三个实根，这时$V_{ab}(x)$则有两个极小值和一个极大值，$V_{ab}(x)$取极大值没有意义，可以舍去，而两个极小值，说明$V_{ab}(x)$有两种极小状态，究竟取哪一种不能确定，因而表示不稳定态。这种有三个根的参数(a,b)就处在分歧点集内，三个x值正好表示曲面$x=l(a,b)$出现了折迭，前面已说明三次方程$4u^3+2ux+v=0$的解，由判别式$\Delta=8u^2+27v^2$判定，在这里$x^3+ax+b=0$，通过数学计算表明，它的解的判别式是$\Delta=4a^3+27b^2$，$\Delta=0$就是尖角形区域的边缘曲线，$\Delta<0$表示尖角形区域；使$\Delta>0$的参数(a,b)，$V_{ab}(x)$只有唯一的极小值，x处于稳定态，见图 3.8。

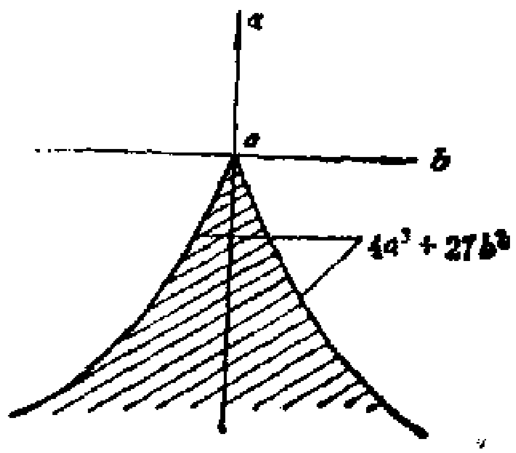


图3.8

3. 燕尾型突变

燕尾型突变的势函数是

$$V(x)=x^5+ux^3+v^2+wx$$

状态变量有一个，即x，控制变量有三个，即u、v、w，故相空间是四维的，这个势函数的临界曲面，即平衡曲面M的方程是

$$V'(x)=5x^4+3ux^2+2vx+w=0 \qquad (5)$$

它是(u,v,w,x)四维空间的曲面，在三维空间中已无法画出，我们称它为超曲面，其奇点集是方程

$$V''(x)=20x^3+6ux+2v=0 \qquad (6)$$

的M的子集，由(5)和(6)可以直接消去x。得到分歧点集B的方程，它是三维控制空间C中的一个曲面，既然我们只关心系统的定性性态，因而首先要能画出B的略图，它是三维空间的图形，因其形状象燕尾，故而得名。如何画其略图呢？一个做法是，设Cu是C中"u=常数"的平面，Bu是Cu与B的交线，则Bu也是C中的一条曲线，若能对所有的u值画出该曲线，则我们就能建立整个曲面B。

即使在u保持为常数的情况下，也最好是不要从这些方程中消去x，而是把它看作沿着Bu的一个参数，我们注意到(6)是x的一个奇函数，(5)与(6)一起意味着w是x的一个偶函数，由此，w是v的一个偶函数，故对任何u，曲线Bu相对于w轴是对称的。

直接对(5)和(6)分别求w和v对x的导数，并注意到w是v的复合函数，再把$\frac{dw}{dx}$、$\frac{dv}{dx}$解出来，得到

$$\frac{dw}{dx} = -2x\frac{dv}{dx} \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dx} = -(30x^2 + 3u) \quad (8)$$

由于(6)、(7)的其他各项为零，我们现在来分别考虑$u>0$和$u<0$的情况。

如果$u>0$，由(8)容易看出，$\frac{dv}{dx}$不可能为零，因此，v是x的严格单调函数，且由(7)可得方程

$$\frac{dw}{dv} = -2x$$

处处成立，方程(6)意味着$v_x \leqslant 0$，等号仅当$x=v=0$时成立，且在该点w也为零。由此可知，Bu是光滑曲线，当$|x|$大时w也大，且$\frac{dw}{dv}$的符号与v的符号相同，并仅在原点为零，综合这些，在平面上建立直角坐标系vow，于是可画出图形如图3.9(a)所示。

如果$u<0$，由(8)可知，令$\frac{dw}{dx}=0$，得$x=\pm\sqrt{(-0.1u)}$，由(7)式可知，当$\frac{dv}{dx}=0$时，$\frac{dw}{dx}=0$，从而对x的三个值，Bu在$x=0$处有一个临界点，而在另外两点处有尖点。

现在我们来确定临界点的类型，我们注意方程(6)意味着对$|x|<\pm\sqrt{(-0.3u)}$，乘积xv不可能是负的。即然x与v同时趋于零，可知若v是一个小的正数，则x也是正的，而$\frac{dw}{dv}$是负的。这一点与Bu相对于w轴对称的事实一起，

确定了临界点是一个相对极大点。

最后，我们注意到若$v=0$，则由(6)式可解得$x=0$或者$x=\pm\sqrt{(-0.3u)}$。$x=0$对应于在原点处的一个极大点，代入方程(5)时，我们发现另两个根都给出$w=\frac{9u^2}{20}$。因此Bu在正w轴上有一个自交点，另外，$|x|$有大的值意味着$|v|$和w都有大的值，最后由参数x的值可知我们所发现的点依次为：自交点、尖点、极大点、尖点、自交点，根据这些可画出图3.9(b)。

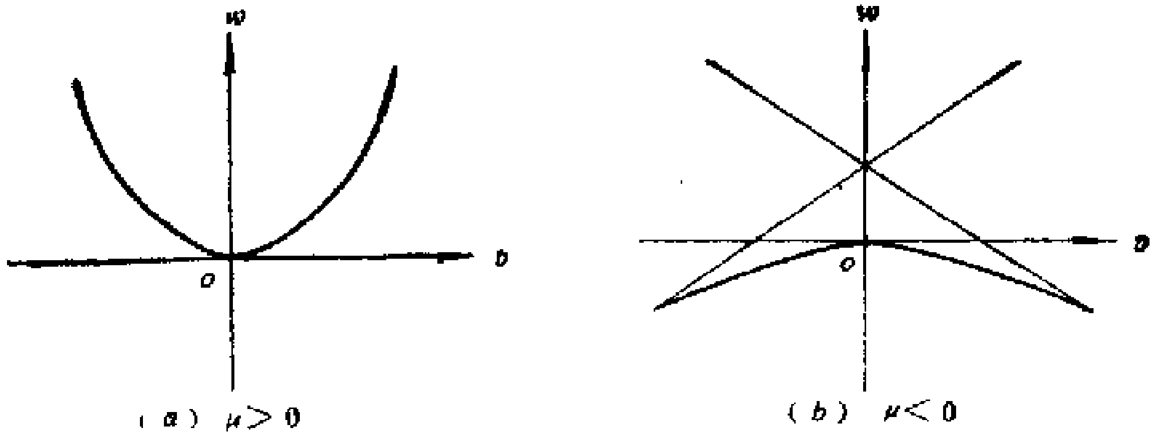


图3.9 燕尾分歧点集的截线

又因为自交点迹线的方程是抛物线

$$w=\frac{9}{20}u^2,\quad v=0$$

我们就可把Bu曲线汇总构成图3.10所示的曲面B。

为找到在B划分C所得三个区域中势的形式，只须考虑$v=0$和$u<0$的点就可以了。

方程(5)是$5x^4+3ux^2+2vx+w=0$，解得(用求根公式)

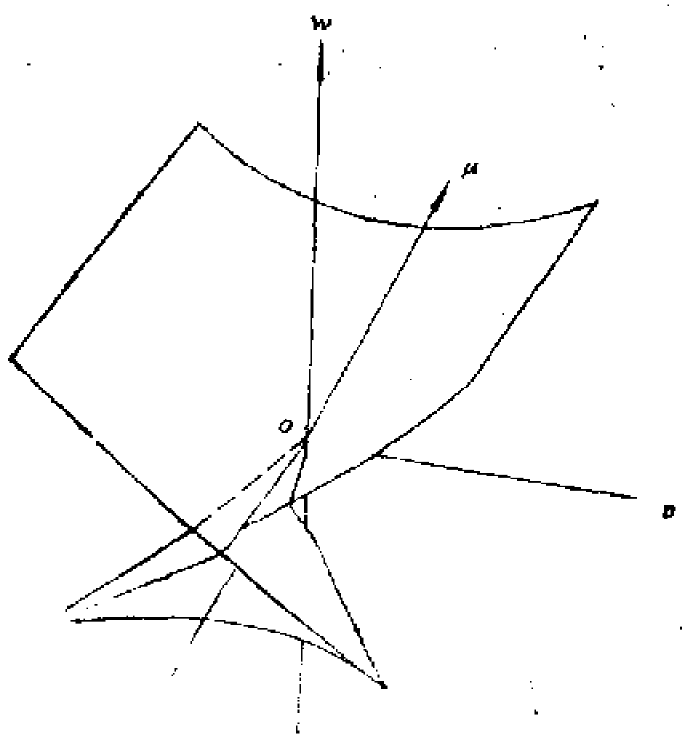


图3.10 燕尾的分歧点集

$$x^2 = \frac{-3M \pm \sqrt{9u^2 - 20w}}{10}$$

由判别式$9u^2-20w$判别方程(5)的根的情况。

(1) 若$w > \frac{9u^2}{20}$，方程(5)无实根，故V无临界点；

(2)若$0 < w < \frac{9u^2}{20}$，这时$\sqrt{9u^2-20w}$是实数且小于正实数$-3u$，x^2的两个解都是正实数，且V有四个临界点：两个极大点和两个极小点；

(3) 若$w<0$，x^2的两个解都是实数，但其中一个是负数，因而V只有两个临界点：一个极大点和一个极小点。

这样，图3.9中曲面上方不可能有稳定平衡点，一个稳定平衡点在曲面下方，另两个在燕尾内。

4. 蝴蝶型突变

蝴蝶型突变，是应用范围仅次于“尖点型突变”的一种基本突变。它的势函数为

$$V(x)=x^6+tx^4+ux^3+vx^2+wx$$

状态变量是x，包含四个控制变量，即t、u、v、w，故相空间是五维的，但控制空间C是四维的，所以还是不能画出分歧点集B。我们现在仍采用与前面大致相似的方法画出它的三维截口和二维截口，最后汇总成蝴蝶突变的平衡曲面，其形状象一只起飞的蝴蝶，蝴蝶型因此得名。现在考虑B被不同的t和u值平面（$t=$常数和$u=$常数）所截的截线，以得B_{tu}的略图。事实上，我们可仅对$u=0$进行计算，因为这足以说明蝴蝶突变的特征。

其平衡曲面M由方程

$$V'(x)=6x^5+4tx^3+3ux^2+2vx+w=0 \tag{9}$$

给出，故是超曲面，奇点集是M的子集，它满足以下方程

$$V''(x)=30x^4+12tx^2+6ux+2v=0 \tag{10}$$

固定t和M并取x为沿着曲线B_{tu}的一个参数。于是由(10)式解出。

$$-v=15x^4+6tx^2+3ux \tag{11}$$

代入(9)得

$$w=24x^5+8tx^3+3u^2 \tag{12}$$

如果$t=u=0$，我们可以消去x而得

$$-\left(\frac{v}{15}\right)^5=\left(\frac{w}{24}\right)^4$$

故B_{00}是一个简单尖点。为了看出对于其他t和u值会发生什么情况，我们对(11)和(12)求关于x的导数

$$-\frac{dv}{dx}=60x^3+12tx+3u \tag{13}$$

$$\frac{dw}{dx}=120x^4+24tx^2+6ux \tag{14}$$

若$x=0$，则由(12)式看到，$\frac{dw}{dx}=0$，而若

$$20x^3+4tx+u=0 \tag{15}$$

则$\frac{dv}{dx}=0$，$\frac{dw}{dx}=0$ $\left[因-\frac{dv}{dx}=60x^3+12tx+3u=4(20x^3+4tx+u),\ \frac{dw}{dx}=120x^4+24tx^2+6ux=62(20x^3+4tx+u)\right]$，方程(13)和(14)别无其他零点，故$B_{tu}$可能有一垂直的切线（它必须在原点处）或若干尖点，但没有水平切线。

方程(15)既然是三次的，故它至少有一个实根，因此B_{tu}至少有一个尖点。如果方程(15)的所有根都是实根，则将有三个尖点，这时判别式必须是

$$u^2+4\left(\frac{4t}{3}\right)^3<0$$

容易看出，由于其第一项是平方项，所以当$t<0$时，不可能被满足，故把t叫做蝴蝶因子。因从简单的尖点曲线到形状类似于蝴蝶的曲线的转化，主要是由这个变量的变化造成的，因为B_{tu}仅当$u=0$时对称于v轴，所以变量u叫做和偏倚因子。w和v分别叫做“正则”变量和“剖分”变量，因为它们起着与尖点突变的正则变量和剖分变量相同的作用。

现令$u=0$，则方程(11)—(14)成为

$$-v=15x^4+6tx^2 \tag{16}$$

$$w = 24x^5 + 8tx^3 \tag{17}$$

$$-\frac{dv}{dx} = 60x^3 + 12tx \tag{18}$$

$$\frac{dw}{dx} = 120x^4 + 24tx^2 \tag{19}$$

若$t>0$，则由(16)式易见v总是负的，在原点有一个尖点，从而无分离的垂直切线，B_{t_u}是一条简单曲线。若$t<0$，则容易验证，在$x=0$和$x=\pm\sqrt{-t/5}$处两个导数$\frac{dv}{dx}$和$\frac{dw}{dx}$同时为零，于是共有三个尖点，但也没有分离的垂直切线，若把$x=\pm\sqrt{-t/5}$直接代入(16)和(17)就可以说明两个不在原点处的尖点都落在上半平面内，再确定曲线与坐标轴的交点。

令$v=0$，则由(16)可得$x=0$，或$x^2=-\frac{6t}{3}$（由求根公式）

$w=0$，则由(17)可得$x=0$，或$x^2=-\frac{t}{3}$

除已知的原点，我们发现曲线与w轴两有个交点，但与v轴只有一个交点。因为两个值$\pm\sqrt{\left(-\frac{t}{3}\right)}$给出同样的$v$值$\frac{t^2}{3}$（正），因此在$v$轴上有一个自交点，核验了对大的$|x|$值$v$和$w$确有已被指出的性态之后，我们可以画出$u=0$和$t<0$时蝴蝶突变分歧点集的截线，表示每个区域中势函数$V(x)$的形式。最小点已标记（见图3.11）。

与燕尾型突变的讨论相似，为了找到在不同区域中势函

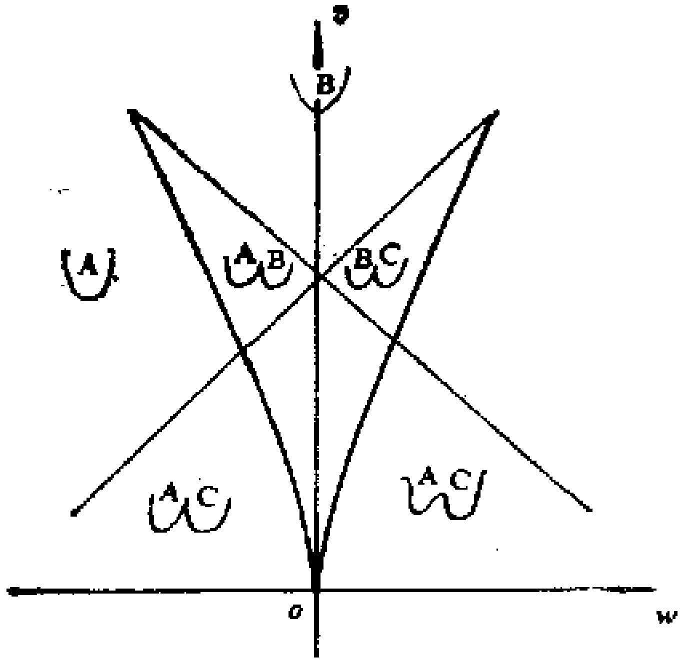


图3.11

数的形式，从取$u=w=0$开始，故由(9)式，M的方程成为

$$6x^5+4tx^3+2vx=0$$

这个方程有五个根，显然，它有一个根是$x=0$，而其余四个，由方程$6x^4+4tx^2+2v=0$给出，由求根公式可得到

$$x^2=\frac{1}{3}\left(-t\pm\sqrt{(t^2-3v)}\right)$$

如果，$t>0$，则x^2只有当$v<0$时为实数，因此在尖点中共有三个平衡点（两个稳定的和一个不稳定的），但其外只有一个（稳定）平衡点，这些完全和尖点突变一样。

如果$t<0$，则共有三种情况：

(1) $v<0$，三个平衡点，两个稳定的和一个不稳定的；

(2) $0<v<\frac{t^2}{3}$，五个平衡点，三个稳定的和两个不

稳定的；

（3）$v>\frac{t^2}{3}$，一个稳定的平衡点。

类似于燕尾突变的情形，这些结果也都是容易确定的，只要注意到越过一个尖点突变的分歧点时，一般情况下，或增加或减少一对平衡点（一个稳定点和一个不稳定点）。其余两个区域，各与一个有三个临界点的区域和一个只有一个临界点的区域有公共的普通边界，由此可知这两个区域中的每一个都有三个平衡点，其中两个是稳定的，一个是不稳定的。

图3.12给出了当$u=0$和$t<0$时作为x，v，w的函数的平衡曲面，这说明了蝴蝶突变与尖点突变之间的相似，对$t>0$曲面是等价的。

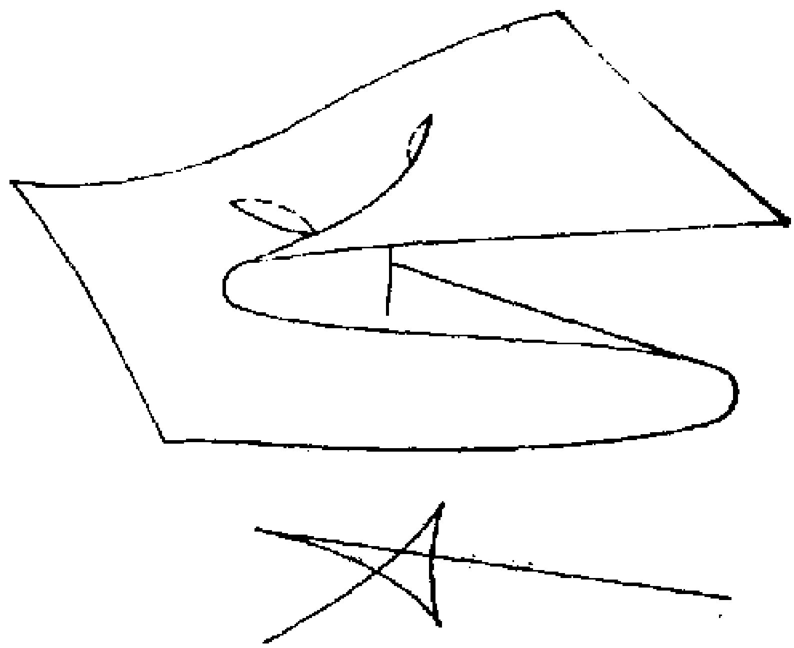


图3.12　$u=0$和$t<0$时蝴蝶突变的平衡曲面

蝴蝶突变描述了三种不同质态互相转化时中介过渡区构成的几何形状，如果有三种稳定的质态，并且它们能互相可逆地转化，那么就可以用蝴蝶型突变来描述，蝴蝶突变和尖点突变都是几种质态之间能够可逆转化的模型。例如水及其他一些物质常有固、液、气三种不同的物态，且它们可以互相转化，相应的模型就是蝴蝶型的。为了方便，这种类型的标准势函数，也常写成 $F=\frac{1}{6}x^6-ax-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{3}cx^3-\frac{1}{4}dx^4$ 临界曲面为 $x^5-a-bx-cx^2-dx^3=0$，对给定的参数 (a,b,c,d) 可能有方程的5个根，可能出现一个实根，3个实根和5个实根的情形，当任意固定 (a,b)，即得一截口，它将 $c—d$ 平面分为几个区域，有二相共存区和三相共存区，可用来更细致地分析过热、过饱和等相现象，如对水的相图（图3.13），在温度、压力构成的控制平面上，相图实际是蝴蝶型的（图3.3的尖角型是其中的一部分）。

蝴蝶型突变在理论化学中特别有用，例如氢氧化物的水溶液有三种基本性质：(a)电离H^+，强酸性；(b)电离OH^-，强碱性；(c)不电离，呈酸性，只要我们选择适当的控制变量，在控制平面上，这些性质存在的中介状态，即弱碱、弱酸和两性区的分布应当是蝴蝶型的，现在我们选择某些键参数，如离子半径和电负性建立控制平面，发现这三种性质的分布的确是蝴蝶型的（图3.14）。

尖点型和蝴蝶型突变是几种质态之间能够可逆转化的模型，自然界有些过程是不可逆的。比如死亡是一种突变，活人可以变为死人，但反过来却不行，俗话说：人死不能复

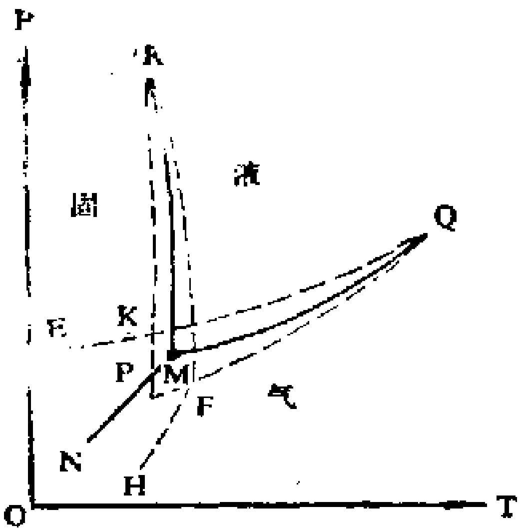


图3.13

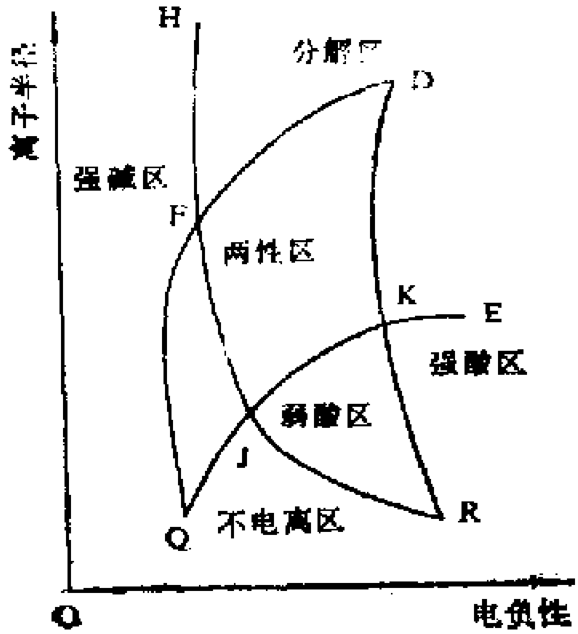


图3.14

活，这一突变过程可以用折迭型、燕尾型等势函数最高为奇次的模型来描述。

上述四种类型的突变，状态变量个数都是1，当状态变量个数为2，而控制变量个数都是3、4时，出现椭圆脐型，双曲脐型和抛物脐型突变，由于它们不能用一个曲面来描述分歧点集，情况就很复杂了，但也可以画出它们的某些侧画，现分别介绍如下。

5. 椭圆脐型突变

椭圆脐型突变或称圆椭型脐点。"脐点"这个名称，是从古典微分拓扑中引用的，对原来对曲面上点的性质的含义所引伸。它的势函数是

$$V(x,y)=\frac{1}{3}x^3-xy^2+w(x^2+y^2)-ux+vy$$

其第一项(x^3)的系数为$\frac{1}{3}$，为的是取导数以后使平衡曲面M的方程在x^2项的系数为1，因为这样可使计算简洁，定性结果当然不受影响（有人也写为$x^3-xy^2-w(x^2+y^2)-ux+vy$）。状态变量有两个，即$x$、$y$，控制变量为3个，即$u$、$v$、$w$，故相空间是五维的，但控制空间仍然只是三维的，所以我们还是能把它画出来。

对$V(x,y)$求偏导数并令其为零，得平衡曲面M的方程是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=x^2-y^2+2wx-u=0\\ \frac{\partial V}{\partial y}&=-2xy+2wy+v=0\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

奇点集S是M的子集，求V的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=2x+2w,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=-2y$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-2x+2w,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y}=-2y$$

作海赛矩阵

$$\begin{pmatrix}2x+2w & -2y\\ -2y & -2x+2w\end{pmatrix}$$

对S而言，还有

$$\begin{vmatrix}2x+2y & -2y\\ -2y & -2x+2w\end{vmatrix}=0$$

成立，或展开为

$$\Delta=4(w^2-x^2-y^2)=0\tag{21}$$

我们仍采用与前大致相同的方法找分歧点集B的方程。为此，考虑截面$w=$常数，并试图画出B_w的略图，由方程(21)可看出，如果w是常数，则有

$$x=w\cos\theta, y=w\sin\theta$$

把它们代入(20)的两个方程，并通过数学运算得仅含一个参数θ的u和v的方程

$$u=w^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\cos\theta)$$
$$=w^2(\cos2\theta+2\cos\theta)$$
$$v=w^2(2\cos\theta\sin-2\sin\theta)$$
$$=w^2(\sin2\theta-2\sin\theta)$$

如果$w=0$，则B_w是单独的点，$u=v=0$。

如果$w\neq0$，则当$\theta=0,\pi,\pm\frac{2\pi}{3}$时，有

$$\frac{du}{d\theta}=0$$

而当$\theta=0$和$\pm\frac{2}{3}\pi$时，有

$$\frac{dv}{d\theta}=0$$

因此在

$$(3w^2,0),\left(-\frac{3}{2}w^2,\frac{3\sqrt{3}}{2}w^2\right),\left(-\frac{3}{2}w^2,\frac{-3\sqrt{3}}{2}w^2\right)$$

处有尖点，而在$(-w^2,0)$处有垂直的切线，这就很容易画出B_w（图3.15），而既然尖点迹线又可看出是抛物线，从而也能画出全部分歧点集B（图3.16）。

现在我们在三个区域中确定V的形式。对位于尖点锥体

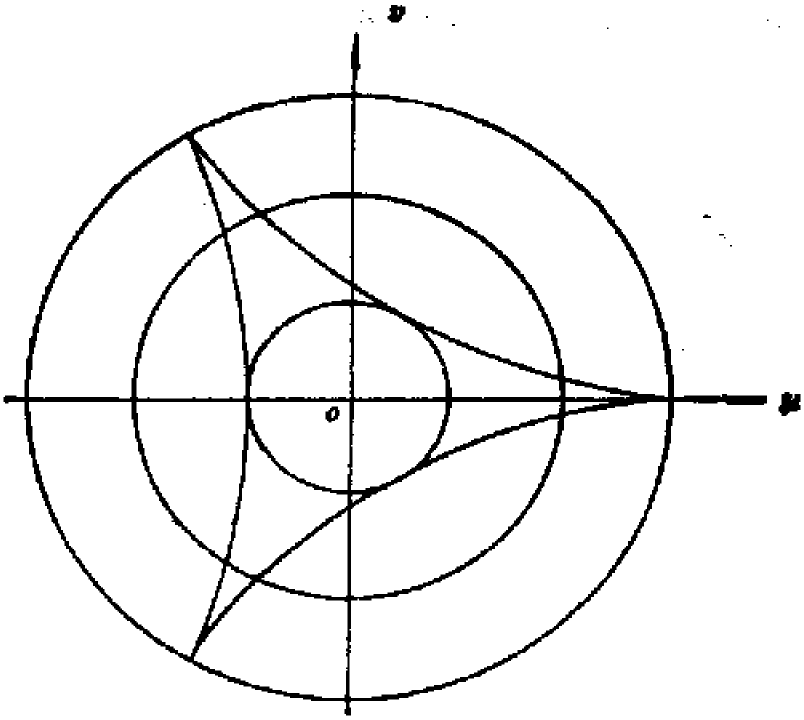


图3.15　椭圆型脐点分歧点集的截线

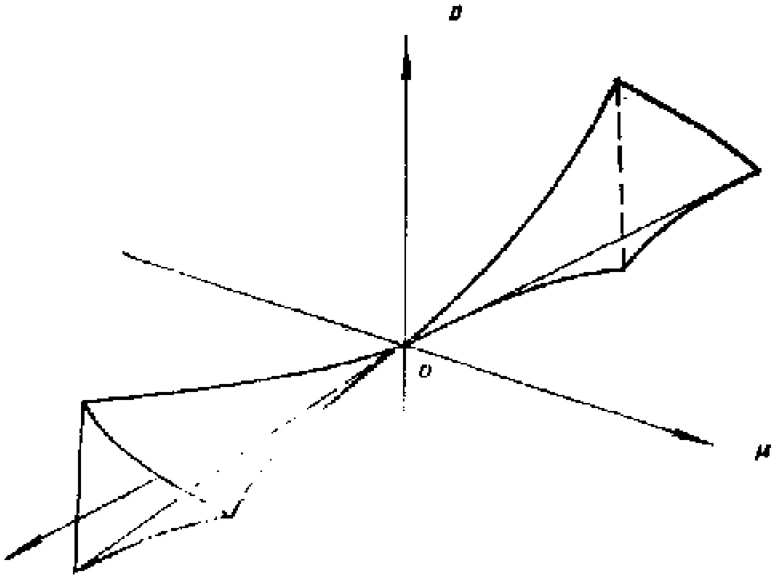


图3.16　椭圆型脐点的分歧点集

内的两个区域，可以通过在w轴上选取样本点的方法把M的方程简化为

$$x^2-y^2+2wx=0$$
$$y(w-x)=0$$

解之，得

$$x=w,\ y=\pm w\sqrt{3};\ x=y=0;\ x=-2w,y=0$$

除了$x=y=0$以外，其余两点都使判别式$\Delta=4(w^2-x^2-y^2)<0$，所以它们是鞍点，如果$x=y=0$，则

$$\Delta=4w^2>0\text{和}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2w$$

因此这个剩下的临界点当$w>0$时是极小点，而当$w<0$时是极大点。故在一个锥体中有三个鞍点和一个极小点，而在另一锥体中有三个鞍点和一个极小点。

在其余区域中，为方便计，考虑特殊点$(u,v,w)=(0,2,0)$，将其代入(20)得M的方程是

$$x^2=y^2\ \text{和}\ xy=1$$

它有两组解：$x=y=\pm1$。在每一种情况下，都由判别式算得$\Delta=-8$，故在这个区域中的每一点，势函数都有两个临界点，且它们都是鞍点，这样以来，在三个区域中只用一个区域可能有不同于空状态的任何状态。

6. 双曲脐型突变

双曲脐型突变或称双曲型脐点，它的势函数是

$$V(x,y)=x^3+y^3+wxy-ux-vy$$

相空间仍是五维的，但控制空间仍然只是三维的，所以我们还是能把它画出来的，其平衡曲面M是三维超曲面，它的方程是

$$\left.\begin{array}{r}3x^2+wy-u=0\\3y^2+wx-v=0\end{array}\right\}\tag{22}$$

各式左端分别为偏导数$\frac{\partial V}{\partial x}$和$\frac{\partial V}{\partial y}$，而奇点集$S$是$M$的一个子集。求$V$的二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=6x,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=w;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=6y,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}=w;$$

故对S而言，还有海赛矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}6x & w\\ w & 6y\end{vmatrix}=0$$

成立，其展开式为

$$\Delta=36xy-w^2=0\tag{23}$$

与前所述相似，进一步讨论的最简方法又是考虑截面$w=$常数，并试图画出曲线B_w。首先注意若$w=0$，则由方程(23)可知$x=y=0$，如果$x=0$，则由(22)的第一式可知，这就意味着$u=0$，而(22)的第二式，由于其第一项为$3y^2$，故要求v为正，对于$y=0$，也得类似的结果；这时意味着$v=0$和要求u为正。因此，B_0由正u轴和正v轴组成。

现在假定$w\neq0$，由方程(23)，把y用x来表达，即$y=\frac{w^2}{36x}$，然后代入(22)式，以求得u和v的参数方程：

$$\left.\begin{array}{l}u=3x^2+\dfrac{1}{36x}w^3\\[2ex] v=\dfrac{3w^4}{30x^2}+wx\end{array}\right\}\tag{24}$$

如果$|x|$很小，则$|u|$和$|v|$都很大，但不论x是小的正数还是小的负数，v总是正的，而u则会改变符号（因为若$w>0$，则u与x同号，而若$w<0$，则符号相反）。从而B_w不是一条连续曲线，它由分离的两段组成。

再把方程(24)对x求导：

$$\frac{du}{dx}=6x-\frac{w^2}{36x^2}$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{6w_4}{36x^3}+w$$

仅当$x=\frac{w}{6}$时，两个导数才同时为零，故B_w没有相对极大点或极小点而只有一个尖点，它位于$\left(-\frac{1}{2}w^2,\ \frac{1}{4}w^2\right)$处。

如果$w>0$，B_w相应于$x<0$的部分是光滑的而没有驻点(0,0)当

$$x=-\frac{w}{3\cdot 4^{1/3}}$$

即当

$$v=\frac{1}{3}w^2\left(\frac{1}{16^{1/3}}-\frac{1}{4^{1/3}}\right)<0$$

时，它与u轴相交。曲线相应于$x>0$的部分有一个尖点，但它既没有驻点，与诸坐标轴也没有交点，又V相对于x和y的对称意味着B_w相对于直线$u=v$的对称，根据这些事实，我们就能画出双曲型脐点分歧点集的截线如图3.17所示。

如果$w<0$，图形与$w>0$时是相同的，只是曲线的光滑部分现在与$x>0$相对应。B与$u=v$的交线又是抛物线，由此

我们立即可以画出B本身（图3.18）。

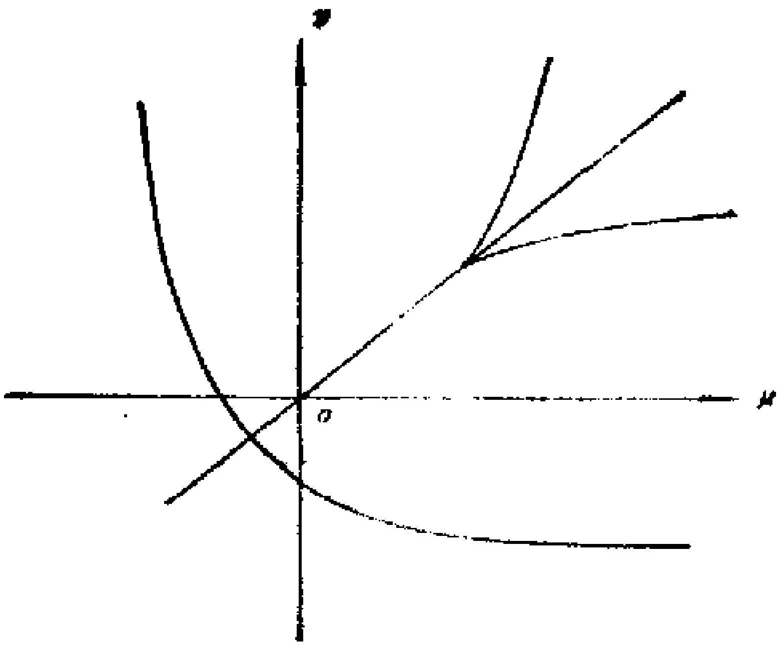


图3.17 双曲型脐点分歧点集的截线

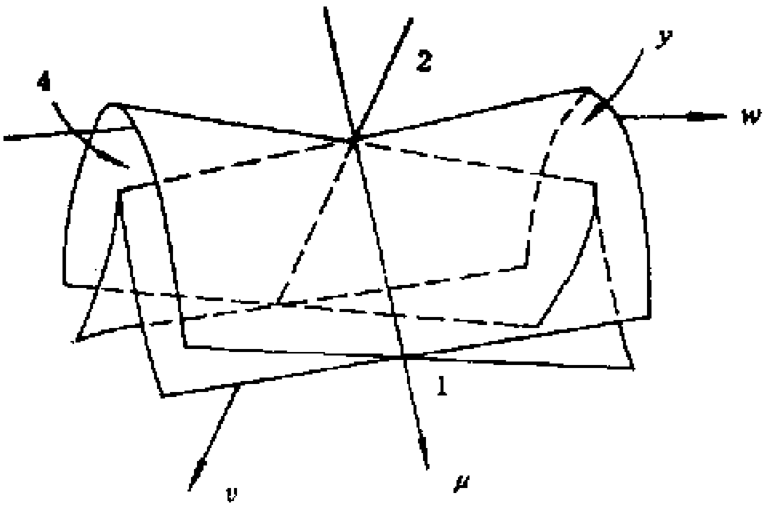


图3.18 双曲型脐点的分歧点集

分歧点集把控制空间分为四个区域，通过考虑落在线

$$u=v, \quad w=1$$

上的各点，我们可以考察其中的三个区域。由方程(22)得

$$u=3x^2+wy$$

$$v=3y^2+x$$

于是得

$$3x^2+y=3y^2+x$$

即
$$(x-y)\left(x+y-\frac{1}{3}\right)=0$$

故
$$x=y\text{或 }x+y=\frac{1}{3}$$

如果$x=y$，则方程(22)的第一式给出

$$3x^2+x-u=0$$

由判别式$\sqrt{1-12u}$知，上式当且仅当$u>-\frac{1}{12}$时有两个实根。如果$x+y=\frac{1}{3}$，则方程(22)的第一式给出

$$3x^2-x+\frac{1}{3}-u=0$$

它仅当$u>\frac{1}{4}$时有两个实根。既然$u=v=-\frac{1}{12}$在B_1的光滑部分，而$u=v=\frac{1}{4}$是它的尖点，我们可以看到在区域1内存在着四个临界点，在区域2内存在着两个临界点，而在区域3内没有临界点。通过在线上选取适当的样本点可容易证明，在区域1内势函数有一个极小点，一个极大点和两个鞍点；而在区域2内，势函数有一个极大点和一个鞍点。剩余的只是区域4，它包括负w轴，通过与所作过的相似的数学计

算，我们就可以证明在这里势函数有一个鞍点和一个极小点。

与椭圆脐点势函数相似，双曲型脐点的势函数也最多只能有一个稳定平衡点，有稳定点存在的区域如图3.19 所示。

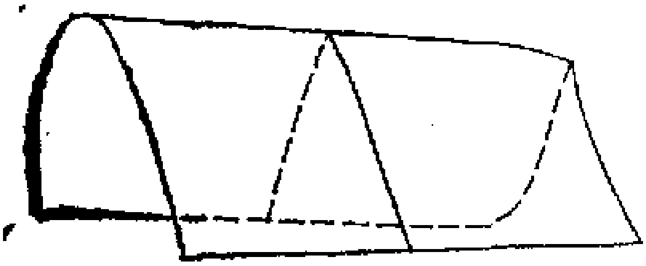


图3.19　双曲型脐点的仅有的非空状态的边界

7. 抛物脐型突变

抛物脐型突变或称抛物型脐点，它的势函数为

$$V(x,y)=y^4+x^2y+wx^2+ty^2-ux-vy$$

先求偏导数$\frac{\partial V}{\partial y}$，$\frac{\partial V}{\partial y}$，并令它们等于零，得平衡曲面$M$的方程：

$$\left.\begin{aligned}&2xy+2wx-u=0\\&4y^3+x^2+2ty-v=0\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

奇点集S是M的子集，求出V的二阶偏导数，对S而言，还有海赛矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}2y+2w & 2x\\ 2x & 12y^2+2t\end{vmatrix}=0$$

即
$$\Delta=(y+w)(6y^2+t)=x^2$$

我们仍可采用与前大致相同的方法画出分歧点集，现在略去其繁琐的计算与分析（因为这只是机械地重复），径直地画出对于不同的 w和t值，抛物型脐点分歧点集的截线，

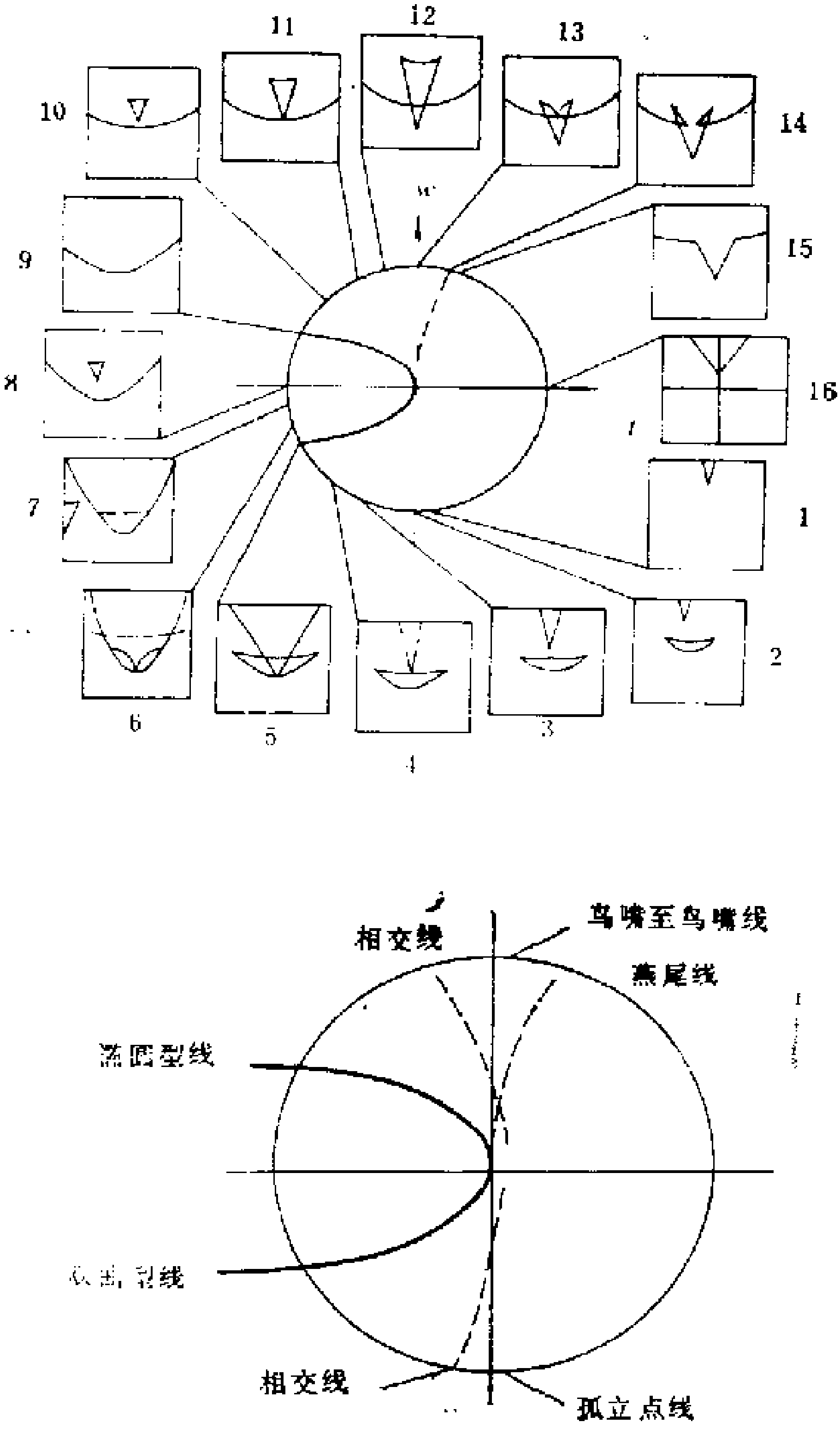


图3.20 对于不同的w和t值，抛物型脐点集的截线

如图3.19所示，以及对于不同的w和t值，局部状态的数目（图3.21），这些图形（连以前已画出的），都是采自桑德斯的《突变理论入门》一书，例如在图3.20中，读者可以认出这样几个突变：尖点(16)，燕尾(14)，椭圆型脐点(10)和双曲型脐点(5)至于(2)和(3)，则是我们还未见到的图形，(2)是"唇"突变；(1)则是鸟嘴至鸟嘴突变见图3.22和图3.23。

不断增加控制空间和状态空间的维数，可以得到越来越多的突变类型。已有数学工作者对多至25维加以分类，但是对实际问题取模型时，上述七种是最重要的，它们的控制空间不大于四维，对通常的物理现象，如果用空间位置(三维)加

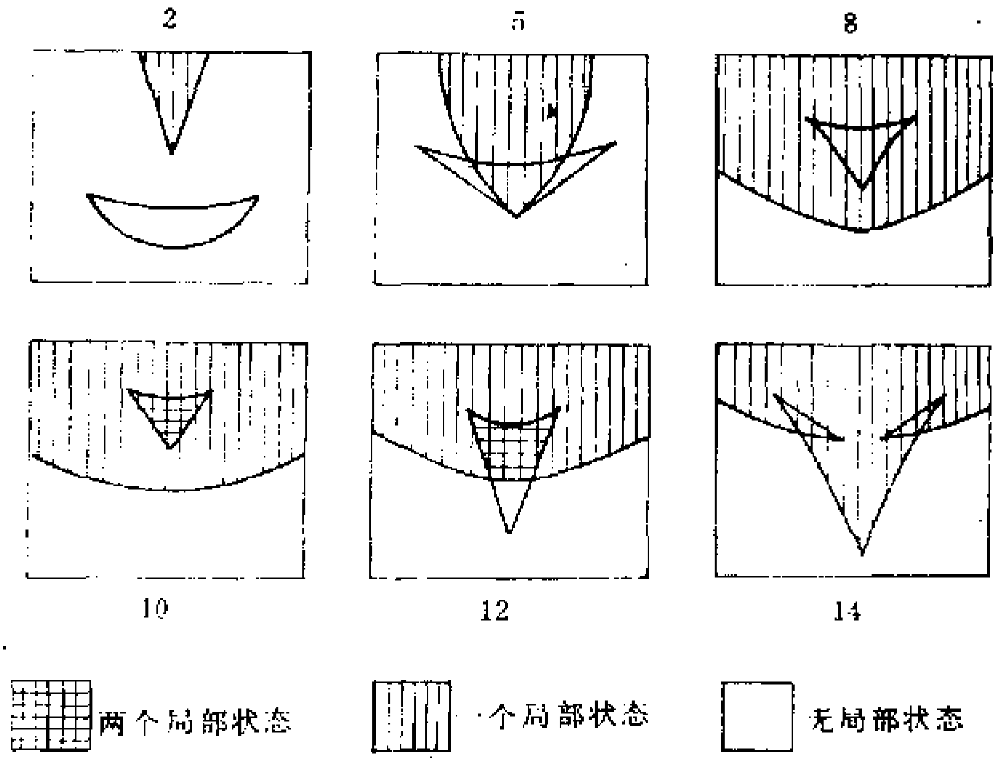


图3.21 对不同的w和t值，局部状态的数目

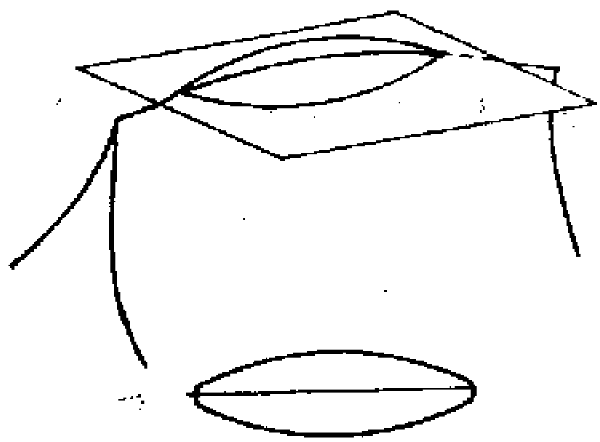


图3.22 唇

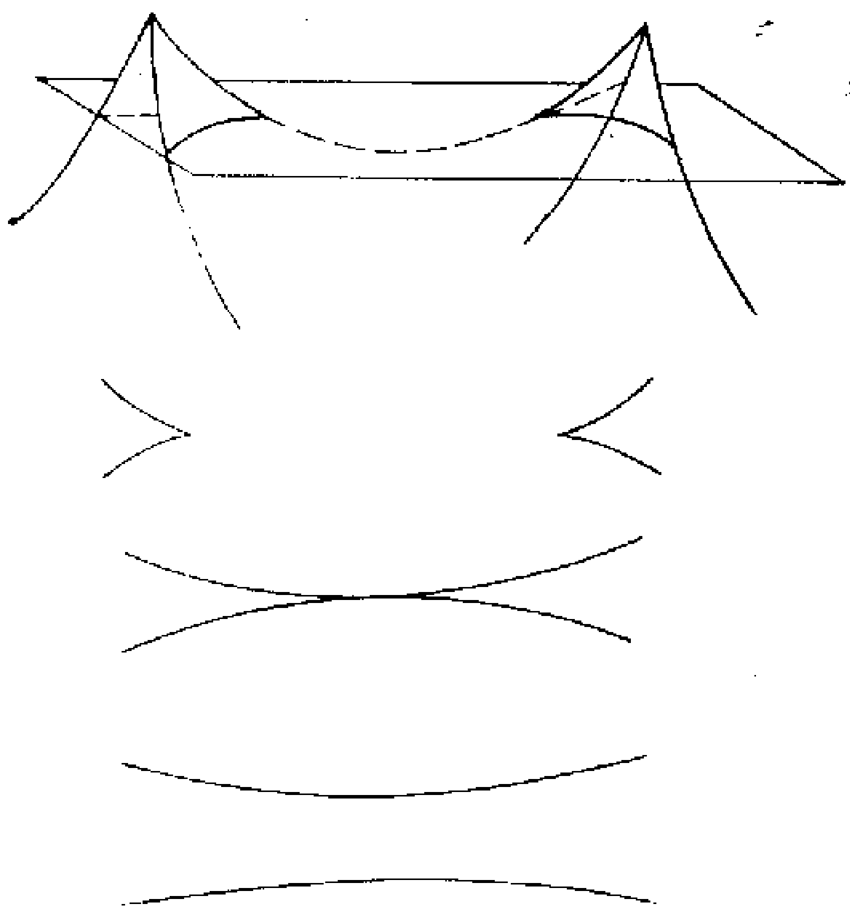


图3.23 鸟嘴至鸟嘴

上时间作为控制参数，也只需要四维，这七种突变的相应的几何性质已如上所述。

高维的突变型，即使不能画出图形，仍然可以作为现象的模型，因为它们的几何特性是完全确定的，当不能用图形来观察状态或行为点的移动时，也可以用分析来研究，每种突变都是由一个势函数定义的，状态曲面是该函数的一阶导数为零时的图象，势函数的最高次项，确定了解的最多个数，最大最小能量状态的个数，反映了突变的基本属性，其余的项，则可以认为是对该属性的干扰，或规定该属性出现的条件。代入控制参数各种可能的值，将决定势能量函数的各种可能状态，例如，对于尖点型突变，u,v 的值在某些范围内将使势能量有两个最小和一个最大状态，在另一些值上则只有一个最小状态。

第四章　突变理论的应用

突变理论是突变现象的一个数学模型，它的一个重要特点是研究自然界和社会领域内的不连续变化的突变现象；说明现实事物，并对事物未来的突变进行预测，控制突变的发生。突变理论的应用虽是初步，但范围广泛，涉及到生物学、医学、物理学、化学、心理学、工程技术、社会科学和人文科学等等，借助突变理论不仅能加深数学、物理学、化学、工程技术等学科中已有定理或定律的认识，且已获得了一些新的成果；特别是在生物学、社会科学和人文科学中，许多现象很难用其他的数学方法处理，却可以应用突变理论。英国数学家桑德斯写道：“突变理论的一个重要特点是，它不仅能应用于许多不同的问题，而且也能以许多不同的方式应用。”突变理论的创始人托姆曾明确地说：“由已知的科学定律出发，把突变理论的形式作为这些定律的结果，这是物理学的途径，或者由对之理解很差的实验形态出发预先认为突变理论的形成是正确的，并试图重新建立导致这个形态的潜在动力学，这是玄学的途径，无需说，照我看来，第二种途径比第一种途径更有希望，虽然，也许不可靠”。这里所谓“玄学的”，实际即社会科学和人文科学的。

下面分别举一些实例来说明突变理论在各个学科领域中的应用。

§ 4.1 突变理论在物理学及工程技术中的应用

物理学及工程技术都是用数学语言描述得比较成熟的学科，但仍然有不少问题可以用突变理论来解释，在物理学及工程领域内，已经建立了突变理论模型来描述激光物理、激波的形成、非线性振荡、流体几何学、弹性结构、热力学和相变理论、船舶的稳定性、曲面的最小面积等等。

1. 在激光物理上

在光学中，一束光线(即一小组相邻的光线)有可能是以某种方式聚焦的，于是，它们汇集在一个平面上，甚至一条线上或一个点上，而不再充满于一个空间区域。它的强度可以很大，如果你拿一个放大镜放在阳光下，光线被聚集照射在纸片上，不一会纸片就会燃烧起来。与聚焦现象相反的是散焦现象，因此把这种曲面叫做焦散面。焦散面与我们用来观察它的屏幕的交线叫做焦散线。在光学中，借助于突变理论找到了光的焦聚散面的全部可能的形式，这是突变理论应用到光学研究中的著名成果之一。

图4.1是太阳光照到一杯几乎是满的咖啡上形成的焦散面，它是一个美丽的尖点型突变集。设杯子的内表面用单位圆表示，圆的中心在直角坐标系xoy的原点。考虑单位圆内的任意点$P(x, y)$，并设Q是圆周上的任一点(图4.2)，其坐标显然是$(\cos\theta, \sin\theta)$，一般说来，在Q点反射的光线将不通过P，例外的是以那些Q点（即那些θ值），对于它们，由光源经过Q到P的路径长度有驻值，但不一定是极小值，如果光源在

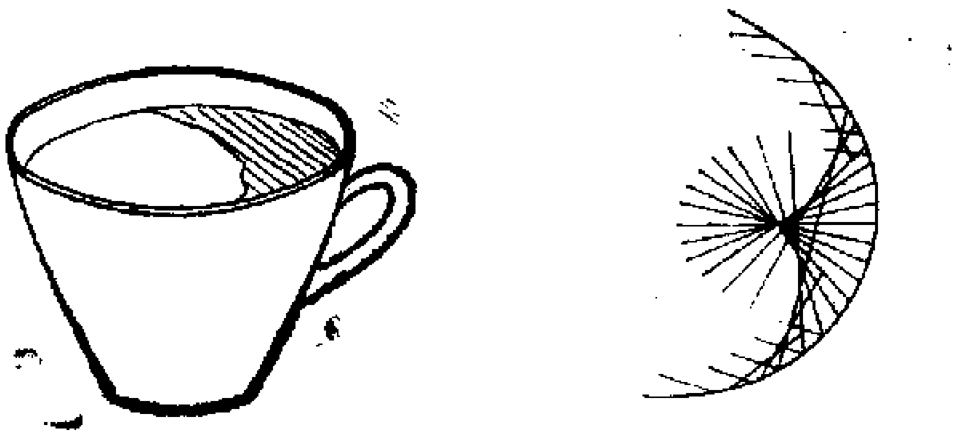


图4.1　一种容易观察到的焦散面

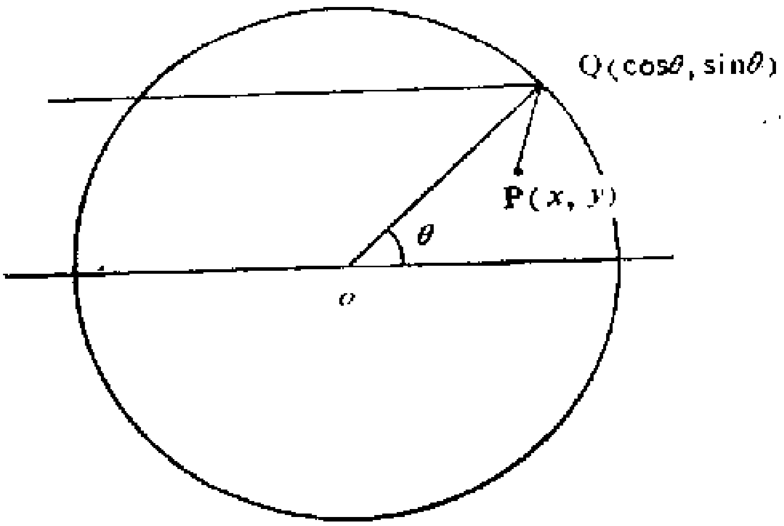


图4.2

$x=-d$，又若设入射光线平行于x轴。则利用两点间的距离公式可算得这一路径的长度是

$$g(x,y,\theta)=d+\cos\theta+\sqrt{(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2}$$

驻值条件当然是$\dfrac{\partial g}{\partial\theta}=0$，由上式求出$\dfrac{\partial g}{\partial\theta}$，经过数学计算得反射光线族的方程为

$$x\sin\theta - y\cos\theta = \sin\theta[(x-\cos\theta)^2 + (y-\sin\theta)^2]^{1/2}$$

焦散线的方程可通过从方程

$$\frac{\partial g}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} = 0$$

消去参数θ而得，但这些正好是以θ为状态量，以x和 y 为控制变量时g的分歧点集的方程。由此可知，焦散线是路径长度为势函数的系统的分歧点集。既然一共只有两个控制变量，就可以预期这个突变是一个尖点型突变。显然，这里表面上和“突变”并没有直接关系，但事实上，若把g在$(\frac{1}{2}$，0，0)点处展成为关于θ的泰勒级数，取至θ的四次项为止，就恰好是尖点突变的势函数。

在这个问题里，函数取极小值的意义是，法国数学家费尔马(Fermat)的“最小时间原则”，而突变集只是决定焦散面的形状。

以上的论述与光线反射所形成的曲面无关，它同样能适用于通过折射聚焦的情况。另一方面，我们所以能把问题处理为一个简单的极小化问题，是因为可用单个参数唯一地确定了一条路径。一般说来，光学路径可通过求积分$\int u\,ds$的驻值来加以确定，这里u是介质的折射指数，用突变理论可以证明，焦散面仍然是分歧点集当焦散面是三维欧化空间R^3中的一个曲面时，控制变量不可能多于三个，因此，可观察到的结构稳定焦散线只可能是折迭、尖点以及燕尾、椭圆型脐点和双曲型脐点的截线。

再举一个有关散焦的例子

夏日雨过天晴，在蔚蓝的天空中，常常会出现一条五彩缤纷的彩虹。我们知道，虹是由于阳光照射到空中的水滴里，发生反射与折射而造成的；当我们在平静无风的海面航行或站在海边瞭望，往往会看到空中映现出远方船舶、岛屿或城廓楼台的影象；在沙漠里旅行，有时也会发现，远处突然有一片湖水，湖面树影摇曳。可是当大风一起，这些景象就突然消失了，原来这是一种幻景，人们称为海市蜃楼，海市蜃楼的产生也是光线反射和折射的结果。另外据报导，在中纬度和低纬度的海区，在海深一千米左右处存在着一个稳定的声道（这是海中的某一水层，声音能够被限制在这个"通道"内传播到很远的地方，而不会"溢"出去）这种现象的产生是由于在深纬海中存在一个稳定的极小声音速度层的缘故。实际上，雨过天晴出现的彩虹和海市蜃楼的形成都与散焦有关，深海声道的产生也涉及到声波的散焦，而散焦现象是可以用尖点型突变来解释的，也就是说，光与声的散焦是一种突变过程。

2. 弹性结构的塌陷

一般弹性结构总可以写出势能的表达式，对弹性结构的不稳定性在很大程度上取决于一个势函数的局部极小值的消失，因此，对弹性结构不稳定性的研究，自然也适合于应用突变理论。

如受水平压力及一个垂直载荷作用下的弹性梁的弯曲问题，就可以用尖点型突变来描述（图4.3），在这个模型中，将压力轴通过尖点进入尖点区，压力参数称为"剪差参数"，因为压力越大，梁的上弯及下弯两个状态的差距越大，垂直载荷轴则与压力轴垂直，与"剪差参数"垂直的控制参数，称

为"垂直参数"，该参数的变化将造成横断尖点区的演变轨迹，在这个模型中，用反应轴表示梁的中点的挠度。

从图4.3可以看出，如果没有垂直载荷，仅仅增加压力，则反应点将进入尖点区，这时梁有两个状态——可能向

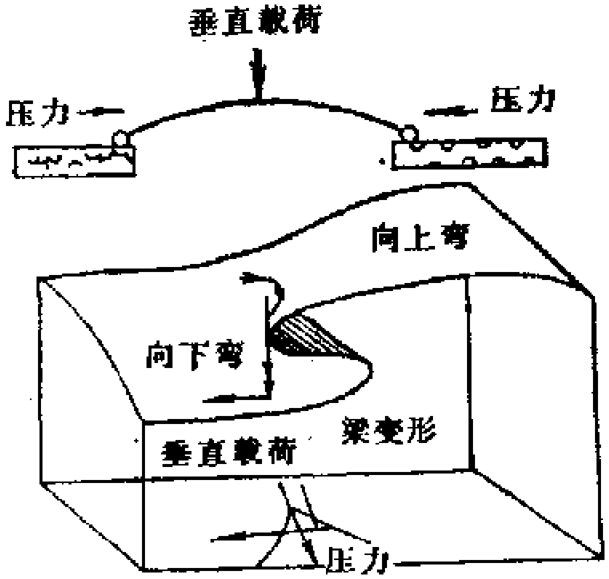


图4.3 受压力及垂直载荷作用下弹性梁的弯曲

上弯或向下弯，取决于通过尖点时是走过那一边，如果是向上弯曲，逐渐加大垂直载荷将使反应点横向移动，逐渐减小上弯挠度，直到走至"上弯"的顶叶的边缘，然后使梁突然转为下弯，反应点落到底叶上去，这是一次飞跃，一次突变。

另外，图4.4是一个欧拉(Euler)拱，它由两根一端自由支承的一个单位长的轻质刚杆组成，两杆的另一端用一根销轴和一个弹性模数为μ的弹簧相连接，这根弹簧力图使两杆间的角度保持为π。在销挂有一个重量α，而在每个自由端作用有水平压缩力β。

设θ是每根杆与水平线所成的角，则两杆之间的角度由

图4.4上易见，就是$\pi-2\theta$，故弹簧中的能量是$\frac{1}{2}\mu(2\theta)^2$，载荷的势能是$\alpha\sin\theta$，使拱变形到这个位置的压缩力所作的

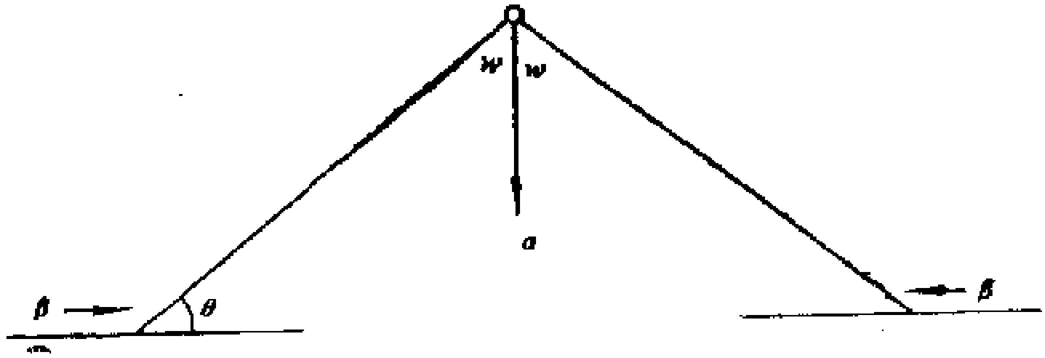


图 欧拉拱

功是$2\beta(1-\cos\beta)$从而系统的总能量是

$$V(\theta)=2\mu\theta^2+\alpha\sin\theta-2\beta(1-\cos\theta)$$

于是
$$V'(\theta)=4\mu\theta+\alpha\cos\theta-2\beta\sin\theta$$
$$V''(\theta)=4\mu-\alpha\sin\theta-2\beta\cos\theta$$

首先假定$\alpha=0$，即设没有载荷作用。于是，确定平衡位置的条件，由$V'(\theta)=0$，得

$$\beta\sin\theta=2\mu\theta$$

对于$\beta<2\mu$，这个方程只有一个解$\theta=0$，相对应的平衡位置是稳定的。对于$\beta>2\mu$，在$\theta=0$的平衡位置是不稳定的，但存在着另外两个解，θ分别为正值和负值，它们给出的是稳定平衡位置。通过第三章对齐曼突变机构和钢丝的弯曲，我们已熟悉了这种情况。在这里，它意味着如果我们作用一个很小的压缩力并逐渐增加，那么，两杆将在其直线位置滞留一段时间，只当β超过2μ时才会出现弯曲。它们常能承受相当量值

的应力（在此为压缩力）而无任何明显的反应。这确实是许多真实结构的典型性态。

假定拱向上弯曲后再作用载荷α，我们把函数V按θ作泰勒展开：

$$V(\theta)\sim\alpha\theta-(\beta-2\mu)\theta^2-\frac{1}{6}\alpha\theta^3+\frac{1}{12}\beta\theta^4$$

可以看出V是与尖点型突变相联系的势函数，引入一个新的变量

$$x=\theta-\frac{\alpha}{2\beta}$$

以把它变换到正则形式，略去所有次数比α或$\mu-2\beta$的一次项为高的项，并利用$\beta-2\mu$得到

$$V(x)\sim\frac{1}{6}\mu x^4-(\beta-2\mu)x^2+\alpha x$$

由方程$V'=V''=0$消去x而定出分歧点集，从而能使我们预言：随着载荷α的增加，拱将逐步地塌下一直达到临界载荷

$$\alpha_0=\frac{4}{3\sqrt{\mu}}(\beta-2\mu)^{3/2}$$

为止。这时它将突然转变为一个塌下的构形。这也是一次飞跃，一次突变。

这一性态可以在真实结构中观察到，虽然桥梁过载时一般全部塌陷。这提醒当我们应用平衡位置时，必须要多么小心。一旦拱开始塌下，它就不再近于平衡位置，这使我们不能确信任何进一步的预测是正确的，因为我们主要关心的是平衡位置是否及何时变为不稳定；以后将会发生什么。

在物理学中，还可用突变理论研究船舶在静态和动态条

件下的稳定性，它为船舶稳定性的探索提供了一种崭新的方法，有些船舶航行在一望无际的海洋中，遇到了狂风，会使船体剧烈摇摆，之后突然倾覆，甚至下沉。据世界有关部门不完全统计，全世界每年大约沉没各种海船达三四百艘。因此，对船舶设计工程师来说，船舶的稳定性事关重大，因为它涉及到船舶的命运问题，通过突变理论的分析，发现在船舶的稳心处存在一尖点型突变，而当船舶超载式处于海浪的波峰时，其倾覆式沉没的可能性的增加，是由燕尾型突变引起的。

3. 非线性振荡

学习过高等数学的人都知道、微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$

是简谐振荡器的最简单的方程（x的系数为1）这个方程适用于诸如作小振荡弹簧或摆这类模型系统。设系统运动规律的函数是$x=x(t)$，初始条件是

$$x\Big|_{t=0}=x_0,\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=v_0$$

它们分别为初始位置及初始速度，如果选取t的原点使得$x(0)=0$，则它的特解是$x=A\cos t$，其中A是常数，常称为振幅。

然而，上述微分方程，其结构是不稳定的，因为几乎任何一个“靠近”它的方程都没严格的周期解。这个方程在物理上也是不可能实现的，因为它与一个毫无能量损失的理想保守系统相对应。在它的右端添加上一项$-K\frac{dx}{dt}$（$K>0$），

以提供阻尼（对于机械系统来说，这表示一个正比于速度的摩擦力）可以改进它，但若我们希望有持续的振荡，就必须提供一个作为"驱动力"的能源，我们取它作为一个周期力。则导致一般的线性振荡器

$$\frac{d^2x}{dt^2}+K\frac{dx}{dt}+x=F\cos\Omega t \qquad K>0$$

这就是强迫振动的微分方程，它的解是

$$x=e^{-kt/2}\,(A\sin at+B\cos at)+\frac{F\cos(\Omega t-\phi)}{\sqrt{[(1-\Omega)^2+K^2\Omega^2]}}$$

其中 $\qquad a=\sqrt{(1-\frac{1}{4}K^2)},\ \phi=\mathrm{tg}^{-1}[K/(1-\Omega^2)]$

A、B是常数。

随着t的增大，右边的第一项减小因而舍去，其结果是：振荡器稳定振幅并不取决于初始条件，而取决于驱动力的振幅F和频率Ω。对于给定的F值，解的振幅在$\Omega^2=1-\frac{1}{2}K^2$时最大。如果$K$很小，这个振幅与$F$相比可以很大，这是众所周知的所谓"共振现象"。

我们现在转向研究最简单的非线性振荡器——杜芬方程(Duffing equation)

$$\frac{dx^2}{dt^2}+K\frac{dx}{dt}+x+ax^3=F\cos\Omega t \qquad K>0$$

记 $$\Omega=1+W$$

并假定K, a, W都很小。三次项表示恢复力的非线性部分。如果$a>0$，则恢复力的增加比随着位移作线性变化的情况为快，于是我们有一个"硬弹簧"，而当$a<0$时，我们有一个

“软弹簧”。没有x^2的项，因为我们希望恢复力是位移的一个奇函数，而使运动对称于$x=0$。

既然α很小，预期杜芬方程的解将接近于线性振荡器，故我们试图求形式为

$$x = A\cos(\Omega t-\phi)$$

的解，把它代入微分方程中，舍去二次项和带有cos3Ω的项，并使方程两边cosΩt和sinΩt的系数相等，从而得到

$$tg\phi = \frac{4K}{(3\alpha A^2-8W)}$$

和
$$A^2(3/4\,\alpha A^2-2W)^2 = F^2 - K^2A^2$$

后一个方程对于A^2是三次式，故我们认出这是一个以A^2为状态变量，α和W为控制变量的尖点突变。通过对方程求导两次并从所得到的两个方程中消去A^2，可给尖点的位置为

$$(\alpha, W) = \pm\left(\sqrt{3/27F^2}\ ,\ K\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

所以，事实上存在有两个尖点突变。如图4.5所示。

当$\alpha=0$时，我们得一个线性振荡器，并且在$W=0$处A有一个极大值，这是发生于驱动力的频率等于系统的固有频率时通常的所谓“共振效应”，但若我们有一个足够硬的弹簧，且使W由负值开始逐渐增加，则A将缓慢地增加到一个极大值，以后再减少，但随后它将突然下降，振荡器的相位也将同时有一个改变。如果我们现在缓慢地减少W，振幅和相位最终将有另一个突然变化，只是发生在不同的位置而已。在弹簧足够软时，也可以看到类似的效应。霍姆斯(Holmes)和兰德(Rand)在模拟电子计算机上做了许多模拟计算，证实了这个近谐和响应的假设是正确的。

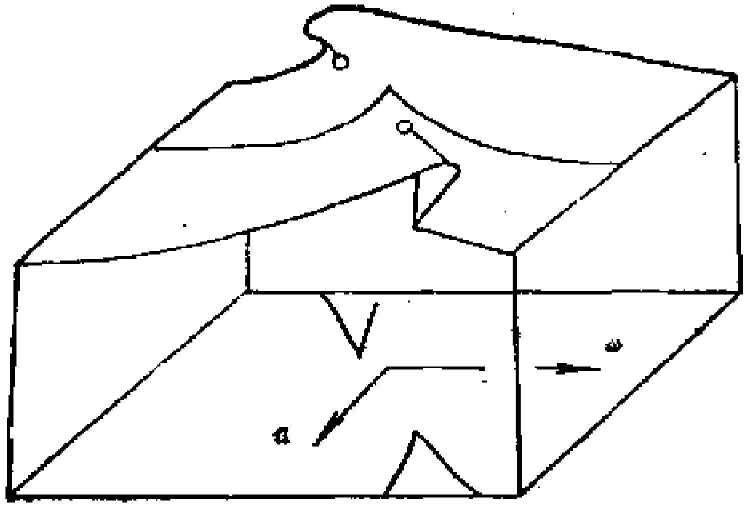


图4.5 杜芬方程被表示为一对尖点突变

杜芬方程在物理学中有广泛的应用。但在这里主要的意义是说明了突变理论用于没有梯度动力学的系统的另一途径。在这个例子中，我们有一个尖点——或者宁可说两个尖点——但可以看出，如果在恢复力中进一步添加x的奇次幂，则我们能够得到较高阶的类尖点。

其他，如果我们同时把状态变量和控制变量看成是时间和空间的函数，就可用突变理论来解释形状的变化方式，图4.6是双曲型突变在参数W取不同值时的分布。它们和各种

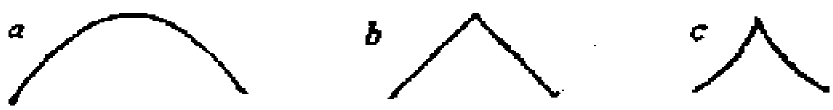


图4.6 用突变理论解释波浪破裂

各样的海浪形状相同。如果再把W看作为时间，它就可以用来说明波浪由圆变尖直至最后破裂的过程。

另外，据最近报导，在非线性控制理论中，已经使用托

姆突变理论的分析，目的是避免控制失灵；非线性系统的反应扩散方程的求解问题，不可逆系统的分支点理论，以及普利高津的耗散结构论理论，哈肯的协同理论等新兴学科领域，也都在使用突变理论的拓扑学理论加以讨论（关于协同论与突变论的关系在下面还将谈到）。

§4.2 突变理论在化学中的应用

在化学中可以用突变理论来说明物体的固、液、气的三态转化，在第三章里我们曾用尖点型突变来描述过，其实，这也是具有蝴蝶型突变的典型例子。氢氧化物的三种溶液也可用蝴蝶型突变来描述（详见第三章）。

在铸造工艺中，当铸铁中碳和硅的含量都很高时，形成石量化较好的灰口铁。当碳和硅的含量都低时，出现大量渗碳体(Fe_3C)，形成白口铁。在灰口铁和白口铁之间，出现两组混合的麻口铁。根据突变理论，这两种质混合出现的双值区在控制平面中的分布应当呈尖点形，即属尖点型突变。大量实验证明，麻口铁出现的区域跟突变理论的结果是一致的（图4.7）。

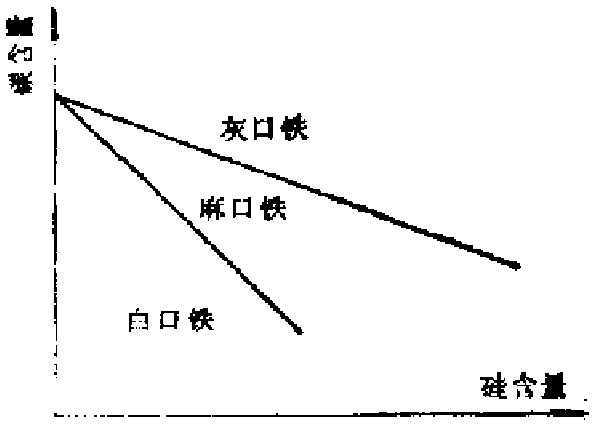


图4.7

其他，如在研究基本粒子时，气泡室在什么条件下工作最灵敏？这个问题较复杂。从突变理论来看，基本粒子进入气泡室可看作一种特殊的干

扰，它的大小是一定的。对这种干扰灵敏的，一定是一个特殊的气液共存区，根据突变理论，这个区在控制平面上是尖点形的，即属尖点型突变，又如用突变集推出化学中键参数平面图，如此等等，不胜枚举。

§4.3 突变理论在地质学及地震学上的应用

"物竞天择"！在有限的资源供给下，人类要求生存与繁衍，就得向大自然进军，探索各种地下资源，地质科学应运而生。地质体历经迭次改造而形成许多断面；熟悉地质学的人都知道：地表面上常有一些三角形的断面，地质学上称为断层三角面（图4.8），系在地应力作用下，岩层突然断裂而形成，这是一种突变现象，断裂的部分是整体中较不稳定的部分。经常呈现三角形——从广义上讲，三角形也就是尖点形，在地质学中，尖点表示邹折或断层，例如岩层断裂这一突变，就是图4.9所示的断层三角面。它是尖点型突变加

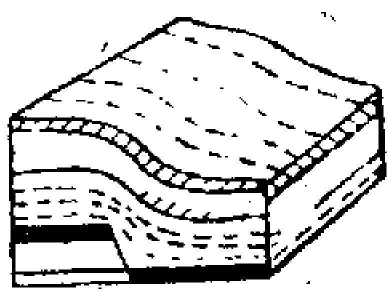


图4.8

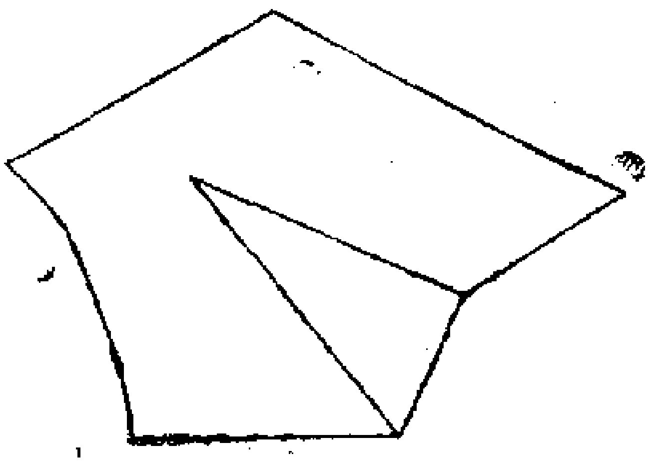


图4.9 一个断层

上麦克斯韦尔惯例或约定(Maxwell convention) 后得出的曲面，这是岩石断裂后常见的一种形状，是地质学上常见的断层三角面。在这里，顺便解释一下麦克斯韦尔惯例。麦克斯韦尔是英国数学家和物理学家，所谓惯例或约定，又有人译为习惯，是用来确定在两个或多个平衡位置中选择哪一个的准则。这种选择不是任意的，它是由系统的本性所确定的。如果系统留在他所平衡位置直到这个平衡位置消失为止，则我们说系统有理想滞后惯例。我们期望在所有的简单系统中能观察到这一点，因为任何其他惯例意味着系统可以发现另一个极小值并移向它去。总是寻找势函数的全面最小值的系统被称为遵循麦克斯韦尔惯例；采用这个名称是因为麦克斯韦尔首先提出了在热力学中用以预测相变函将在哪里发生的规则，也可能有其他惯例，例如非理想滞后惯例，根据这个惯例，系统将移向全局极小值，但仅当无需超过一定高度的势垒就能做到这一点时才行。

地震与地球构造密切相关，据统计，地球上大约每年要发生五百万次地震，其中人们能够感觉到的约有五万次，带来破坏的约一千次，造成强烈破坏的约有十次左右，1976年，我国唐山突然发生大地震，造成几十万人的死亡，控制地震不发生还很难做到，但预防是完全可以办到的。那么是什么原因造成地震的呢？人们经过对地震的观察，分析和归纳得出：地震的产生必经具备两个基本条件，即有可能积累起大的应变能，有可能造成应变能的突然释放。这就指出了地震已经是一种突变现象，但它需要一个应力积累由量变到质变的长期过程，它是地球内部应力与断裂面和岩石强度矛盾斗争激化的结果，是由量变到质变的一飞跃。

地震是突变现象，但要用突变理论来解决象地震这样复杂的问题，还需要做许多工作。但是，突变数学模型却可以启发我们对地震突变现象的理解。比如，我们可能观察了过去地震的某些前兆参数，记录了这些参数的临震值；但是在另一些地方，当这些参数又达到临震值时，发出警报后地震却并不发生，这说明我们的认识还不够充分，这种不充分可能是因为我们忽略了另外一些有重要作用的参数。但是另一方面，根据突变模型可以推论到还有另一种可能，即我们考虑的参数已是充分的，只要这些参数到达我们测定的临界值状态下，地壳有两种稳定位置，反应是双态的，那么在同一状态下震与不震，就取决于这些参数达到临界值的演变过程。某些情况下，它们的演变轨迹是绕过奇点的某一侧，地震发生了；而在另一些情况下，演变轨迹是绕过奇点的另一例，地震并不发生，就是说，在地震孕育过程中，是否也存在初态的微小差别导致结果差异很大的“发散”现象，这种分析，会促使我们不仅努力去寻找有没有被遗漏的参数；另一方面则不满足考虑参数的静态值，而着手对参数的演变过程作动态分析，提高预报的准确性，这也可以说是突变理论的一种间接应用。

§4.4 突变理论与协同学

协同学(Synergetics) 又译为协合学，是联邦德国斯图加特大学著名理论物理学家赫尔曼·哈肯教授在研究激光理论的基础上，1973年首次提出了协同学这一概念，又经过几年的努力，他在1977年出版了《协同学引论》一书，正式创

立了“协同学”。

协同学采用不同领域分析类比的方法，研究一个与外界有物质，能量、信息交换的开放系统（无论是化学的、物理的、生物的还是社会的）。由于其内部各子系统之间的相互作用和相干效应，从无序杂乱状态变为宏观有序状态的机理和共同演化的规律，对于这样一个复杂的开放系统，用以描述其状态的变量可能成千上万，影响事物发展的因素也不可胜数。哈肯具体分析了系统中不同状态变量在临界点处的情况，发现绝大多数变量在临界点附近阻尼大，衰减快，对相变的整个过程没有明显影响，只有一或个几个变量不仅不衰减，而且始终左右着演变过程。因此，哈肯将状态变量分成两大类：一类是阻尼大，衰减快的快弛豫参量即快变量，另一类是左右相变的参量称为慢变量，也叫序参量。序参量的特点是变化很慢，但它主宰着系统演化的整个过程，决定着演化结果出现的结构和功能，虽然不同系统中序参量代表的物理意义有所不同，但是序参量的个数非常少，系统的相变特点完全由序参量决定。因此如果我们描写这类系统的相变，只需抓住这些序参量就行了，例如我们在讨论企业管理时，一个企业发展的好坏，可以用很多指标来衡量，但在决定企业是发展还是倒闭的相变过程中，我们只需抓住对企业起决定作用的序参量即“利润”就可以了。其他一些指标，如产品数量的多少，质量的好坏，以及成本的高低等都可以由利润来决定。

按照协同学的精神，我们可以自由选择学科，从中选取代表序参量的u和代表子系统的s，并把分别称做U和S的分子浓度作为u和s，为取定u和s的方程，我们考虑下面的过程：

U是由一个自催化反应产生出来的，也就是说，它的产生率正比u，而它的衰减是由包含分子S的自催化反应引起的。用λ_μ和"1"表示相应的速率常数，我们得到：

$$u = \lambda_\mu - su \tag{1}$$

假定分子S的衰减正比于其浓度，并且分子S通过一个双分子过程从U产生，我们得到：

$$\dot{S} = -\lambda_s S + \mu^2, \quad \lambda_s > 0 \tag{2}$$

现在假定序参量u的弛豫比子系统慢得多，即$|\lambda\mu| \ll \lambda_s$，则在很多情况下，我们可以略去方程(2)中$s$对时间$t$的导数这一项，用：

$$S = \frac{u^2}{\lambda_s} \tag{3}$$

来解方程(2)

把方程(3)代入方程(1)，即得结果序参量方程的最简器的例子：

$$u = \lambda_\mu u - cu^3$$

显然，在非阻尼的情况下（$\lambda\mu > 0$），我们得到一个解：u不等于零（用化学例子中的术语来说，就是产生了分子的宏观浓度U）。这样原来不稳定的模式经由现在起着"子系统"作用的稳定模式而稳定了。但实际上我们要处理的是复杂得多的系统。然而，在很多明显的情况下，结果序参量方程有某些简单结构，这样的结构对于原来完全不同的系统（如激光器，化学反应等）可能是同样的，这使我们可以确定不稳定的类型。与常规的相变理论中的分类十分相似，每一类包含着一系列典型的静态和动态现象。第一类由下面形式的（序参量）方程组成：

$$q_i = \frac{\partial V(q)}{\partial q_i}, \ i = 1, 2, \cdots\cdots N$$

也就是说，存在一个势函数V (q)。当我们寻找稳定态，只要找出V的极值即可。V的最简单的例子如图 4.10 所示，势函数曲线显示出从具有一个极小值向具有两个极小值的转变，结果导致分歧现象，现在我们来讨论失稳点附近的势函数，目的是要找到临界点的分类，这就是托姆的“突变理论”。

我们考虑势函数$V(q)$，（主要讨论一维情况）并假定它可以展成泰勒级数：

$$V(q) = c^{(0)} + c^{(1)} q + c_2^{(2)} q^2 + c^{(3)} q^3 + \cdots + c^{(m)} q^m + \qquad (4)$$

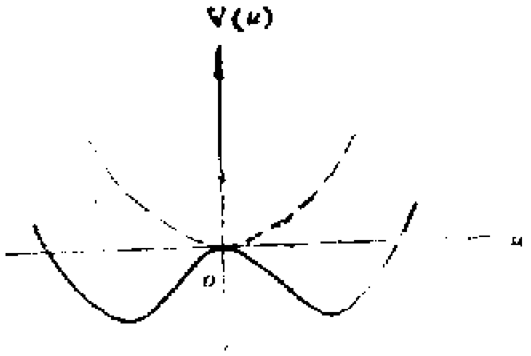


图4.10

在$q=0$点，（4）的泰勒级数的系数为：

$$c^{(0)} = V(0) \qquad (5)$$

$$c^{(1)} = \frac{dV}{dq}\Big|_{q=0} \qquad (6)$$

$$c^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dq^2}\Big|_{q=0} \qquad (7)$$

可一般地写成

$$c^{(l)} = \frac{1}{l!}\frac{d^lV}{dq^l}\Big|_{q} = 0 \qquad (8)$$

由于势函数曲线移动一个常量时，曲线的形状不变，我们总可以令

$$c^{(0)} = 0 \qquad (9)$$

我们现在假定讨论的是一个平衡点（它可以是稳定的，不稳定的，或亚稳定的）。

$$\frac{dV}{dq}=0 \tag{10}$$

由(10)得到

$$c^{(1)}=0 \tag{11}$$

现在，我们先对小量做几个简单很重要的说明，我们来比较小量q的不同次幂。比如$q=0.1$，得$q^2=0.01$，即q^2只是q的10%，再比如$q=0.01$，得$q^2=0.0001$，即q^2只是q的1%。对于相邻的幂次，比如q^n和q^{n+1}，显然也是这样，当我们从一个幂次进到下一幂次，选择q充分小就可以使我们在与q^n比较时能够忽略q^{n+1}，因此可以只讨论展开式(4)的主项。当

$$\frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=0}\equiv c^{(2)}>0 \tag{12}$$

势函数曲线出现一个局部极小值（图4.11(a)）。

下面引进一个略微不同的记号

$$c^{(2)}=\mu \tag{13}$$

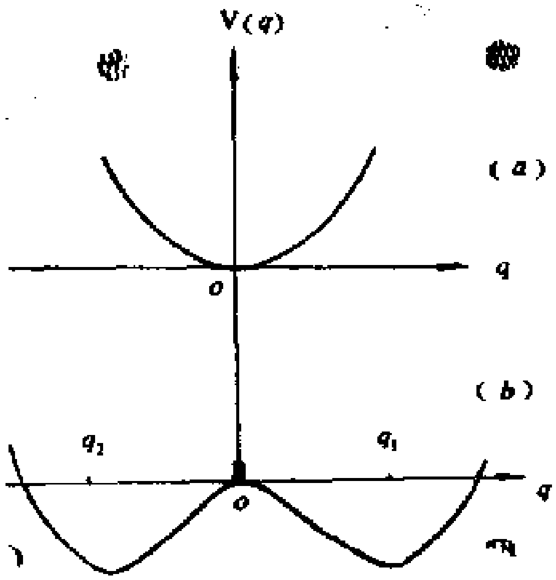


图4.11

当所讨论的系数中某些参量变化时，μ可能改变符号。这使稳定点$q=0$在$\mu<0$时变成一个不稳定点，或者在$\mu<0$时变成一个随遇稳定点。在这种点的邻域，$V(q)$的行为由q的下一个不为零的幂次所决定。我们把$\mu=0$的点也称为不稳定点。首先假定：

(1)$c^{(3)}\neq 0$，以致

$$V(q)=c^{(3)}q^3+\cdots \tag{14}$$

在实际中，$V(q)$会受到扰动，扰动的原因既可以来自外部，比如机械工程中的负载，也可以来自内部的缺陷，我们假定这些扰动是小的，它们中哪一个将使(14)的特性改变最大呢？很邻近$q=0$时，q的高次幂，例如q^4与(14)相比要小得很多，所以这种项对(14)的影响不大。另一方面，缺陷或其他扰动可能导致比q^3低的幂次，(14)的这种扰动使系统的状态发生显著变化。

最一般的情况应包括所有的一次幂，即

$$V(q)=\alpha+\beta q+\gamma q^2+c^{(3)}q^3 \tag{15}$$

托姆把非平庸改变原来奇点(14)的所有扰动称为“展开”，为了把(14)的所有可能的展开加以分类，必须去掉多余的常数。首先，适当选择q轴的标度，可以把(14)中的系数定为1。此外，还可以通过平移q轴原点的变换。

$$q=q'+\delta \tag{16}$$

去掉(15)中的二次项。最后，我们可以移动势函数的零点，使得(15)中的常数项为零。因而剩下的是$V(q)$的“标准”形式

$$V(q)=q^3+uq \tag{17}$$

我们知道这恰恰是折迭型突变的势函数。在$u=0$和$u<0$时的

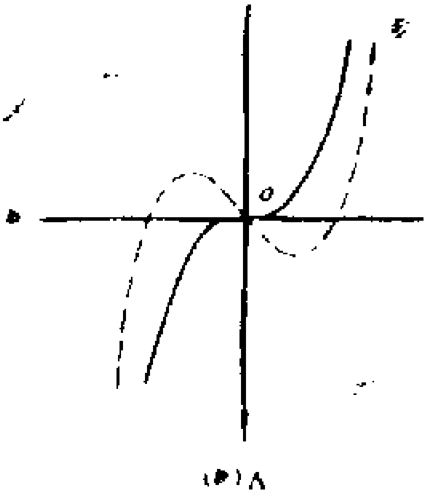


图4.12

曲线势函数在图4.12中给出，在$u \to 0$时极大和极小重合成一个拐点。

(2)$c^{(3)}=0$，$c^{(4)} \neq 0$

未受扰势函数为：

$$V = q^4 \tag{18}$$

经适当地选择平移q-V坐标系的原点，这个势函数的展开式就可写成

$$V(q) = \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{2}uq^2 + vq \tag{19}$$

我们知道，(19)式中第一项和第二项的系数分别选为$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{2}$，是为了使V对q的导数有以下的简单形式

$$\frac{dV}{dq} = q^3 + uq + v \tag{20}$$

如果令(20)式等于零，则得到q的一个三次方程，它的解给出势曲线的三个极值位置，图4.13给出了对于u和v的几

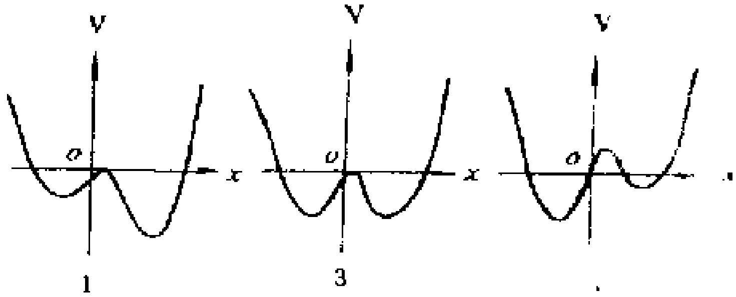


图4.13

组不同值，势(19)的形状（按照托姆）。

我们现在依靠参数量u和v来区分不同区域。如果判别式$\Delta=\frac{1}{27}u^3+\frac{1}{4}v^2>0$，只有一个极小值，而在$\Delta<0$时，我们得到两个极小值，它们的深度，依$v$的大小而定。例如，对物理系统来说，只有较低的那个极小值状态才能实现。因此，当改变参量u和v时，系统的状态可以从一个极小值跳到另一个极小值，这使得系统所实现的情况不同对应的u-v平面上的区域也不同，如4.14图，在u-v平面上，实线把一个势极小的区域（右区域）与两个势极小的区域分开，实线在托姆的意义上代表由分歧点组成的突变集合。虚线表示那两个极小的值相同，按托姆的说法，这条线代表由竞争点组成的突变集合。

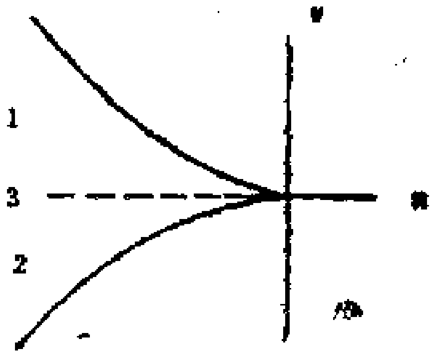


图4.14

（3）如果$c^{(4)}=0$，但下一个系统不为零，则临界点的势函数为

$$V=q^5 \tag{21}$$

适当地标准化后V的展开式是

$$V=\frac{1}{5}q^5+\frac{1}{3}uq^3+\frac{1}{2}vp^2+wq \tag{22}$$

其极值由导数

$$\frac{dV}{dq}=q^4+uq^2+vq+w=0$$

确定，它容许有零个，两个或四个极值，意味着零个，一个

或两个极小值，如果我们改变u，或v，或w，或同时改变它们中的某几个，就可能改变极小值的个数（分叉点），或使它们的深度相等（竞争点。）

这种变化一般发生在u-v-w空间某些曲面上，而且这些曲面的形状很特殊，图4.15是势极小数目产生变化的突变集

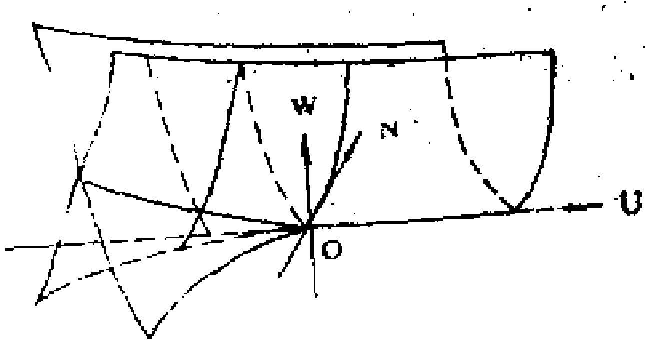


图4.15

合所构成的曲面。把u-v-w空间划分成若干区域，把一个极小的区域中两个极小值的区域分开的曲面具有燕尾形

关于二维和n维的情况，因篇幅所限，在此不做讨论，有兴趣的读者，可参阅哈肯原著《协同论》的引论（中译本，原子能出版社，1984年版。）

§4.5 突变理论与耗散结构

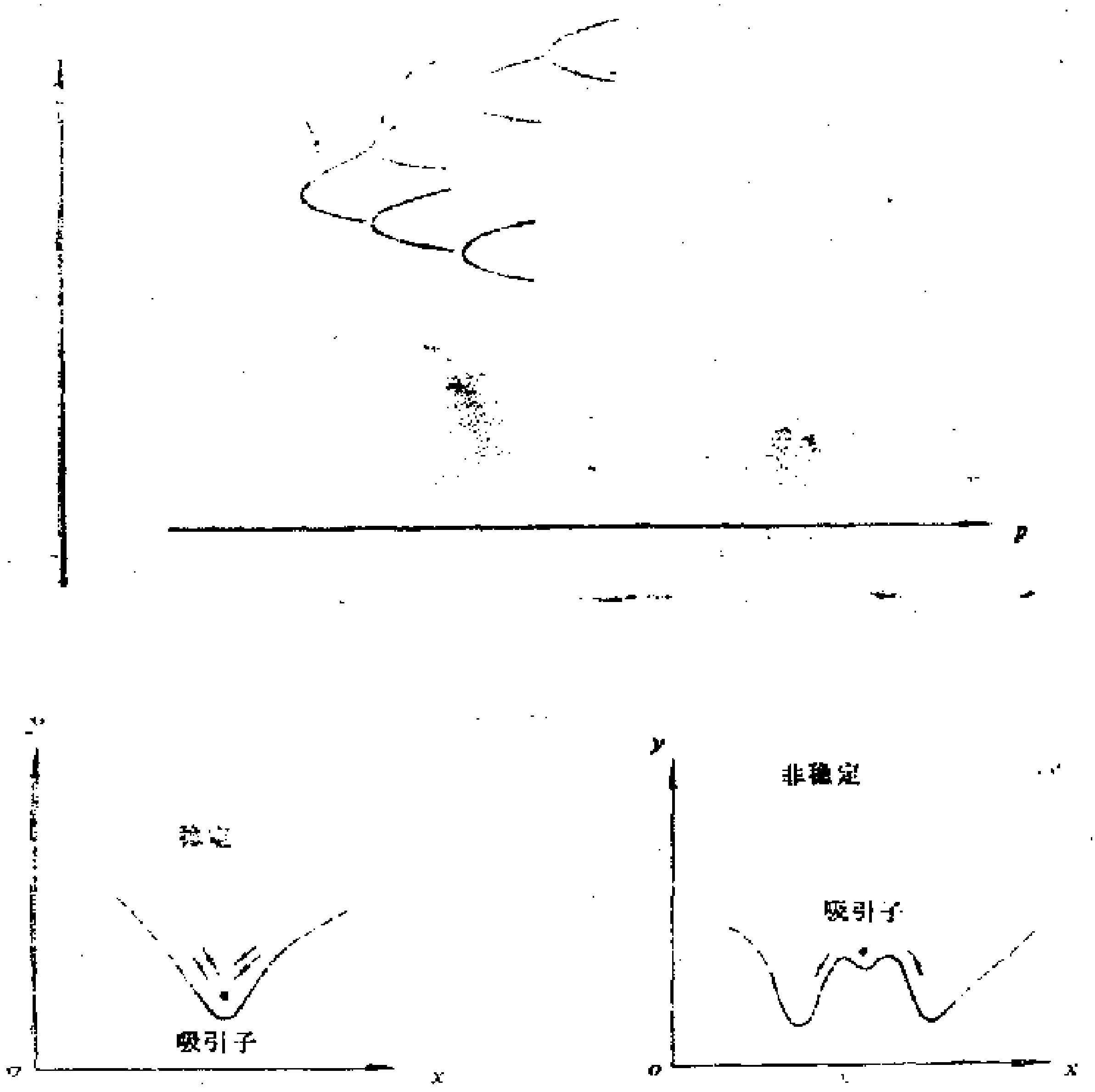
耗散结构(Dissipative structures)理论，是比利时自由大学著名教授普利高津(I.Prigogine)从1947年到1967年长达二十多年间，由热力学第二定律出发，在研究非平衡态热力学和统计物理学的基础上，发现的一个与外界有物质、能量交换的开放系统（无论是力学、物理学、化学、生物学、还是

社会和经济学）在从平衡态到达近平衡态再向远离平衡态推进的过程中，当到达远离平衡态的非线性区时，一旦外界条件的变化达到某一特定的阈值，该系统就会自行产生一种自组织现象（即自行产生的组织和相干性），从稳定变成不稳定，通过涨落发生突变（即平衡相变），可能使系统从原来的无序状态转变成为一种时间、空间或功能有序的新的结构，并可保持一定的稳定性，不会因外界的微小干扰而消失。系统在远离平衡的非线性区而形成的新的、稳定的宏观有序结构，普利高津称之为耗散结构。其理论又称为耗散结构理论，也称为非平衡系统的自组织理论。“耗散结构”一词是为了显示这些状态仅能和它们的环境存在。如果系统与环境的作用解除，整个结构就会崩溃。所谓涨落，是指系统中某个变量和行为从平均值的偏离，它使系统离开原来的状态或轨道。

对于这种新结构，要求一定的数学工具来定量地加以研究。通常用非线性的微分方程组来描述非线性的相互作用。非线性微分方程组的特点是有多重解或分支解。普利高津采用微分方程的稳定性理论分析了结构的稳定性问题，系统从稳定到不稳定（失稳）又到新的稳定的转化，找到了确定热力学是否稳定的根据，系统在平衡态和近平衡线性区，即在热力学分支点之前，处于稳定状态。小的涨落和扰动，不足以改变系统的稳定性。因此，在这个阶段不能形成新的有序结构。当外界条件的变化达到分支点以后，系统有可能失去稳定，于是也就有可能通过涨落或突变进入一个新的稳定有序的状态，形成耗散结构。所以，突变理论在研究系统涨落问题中有很重要的应用。如下可用经济系统中的问题来分析。

在研究经济的分支进化问题中，当经济系统处于一种平

衡状态时（这种宏观的平衡应作最广义的理解），不仅指物质形态的物料，也不仅指货币，也不仅指经济生态，而是指全部系统的总和，它具有势函数特征性稳定，一些涨落（偏离平衡的因子）的影响不足以使它脱离吸引子，可是当它发



a 稳定平衡态　　　　b 远离平衡态涨落引起突变

图1.16　由于多分支点组成的演化结构

展到远离平衡阶段，一些涨落的放大足以突变到不同的状态（见图4.16）。

任何一国的经济演化都是每个阶段不同涨落引起状态突变后的分支组合的实迹或时痕。如果每次偏离平衡的涨落引导到另一次持续增长的相突变，这种历史的实迹是经济长期上升，相反，则出现波动。如果波动有时间间隔，这就是周期循环，这里的关键是判断涨落因子和预测下期涨落可能出现的因子。

凯恩斯的均衡分析理论主要以总需求量作为涨落因子，以物价水平作为状态变量，比如他用图 4.17的曲线族分析过渡需求引起的通货膨胀。

图4.17中纵轴P表示物价水平，横轴Q表示产量水平，D_1、$D_2\cdots D_5$表示不同水平的总需求；Q_1为现有资源能达到的最大产量（或称充分就业产量）。

价格为P_1时总需求为D_1，产量为Q_1，价格为P_2时总需求为D_2，产量为Q_2；价格为P_3时，总需求为D_3、产量为Q_f此时已达到社会最大产量，因此如果总需求继续增大（比如由D_3上升到D_4, D_5），但产量不变，价格只好由P_3直线上升到P_5。这条A、B、C、D、E点连线，被他称作通货膨胀轨迹，其中CE段是过渡需求表现。

用突变理论与耗散结构理论这是容易解释的，在均衡状态下，总需求作为一种涨落不致使价格状态有很大偏离。

但是如果这种涨落发生在远离平衡的非线性动力区（如图4.17的A—B—C），它就完全可能引起状态突变，因为这是非稳定区。

突变或者说相突变，前面几章介绍了7种形式，在这里

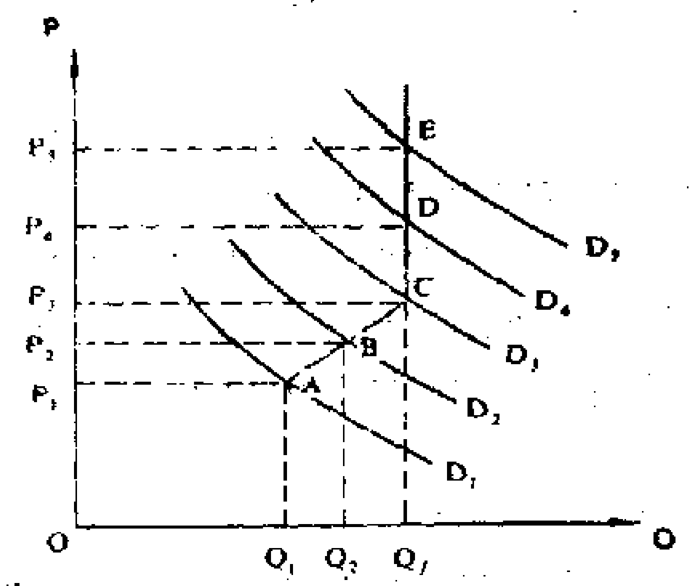


图4.17　凯恩斯的过度需求分析图

所运用的是两个控制变量组成的“尖顶式”突变，它的势函数形式为：

$$\frac{1}{4}x^4-ax-\frac{1}{2}bx^2$$

这是一种中间折叠的状态突变模式，可用图4.18简单描述。

图4.18中的上半部是一个三维空间图形，它的纵轴就是价格水平，这是一张带有中间折叠的曲面，折叠页的上半部是通货膨胀区，下半部是物价稳定区，中间的折叠部分表示状态的突变。图4.18的底部是折叠面的投影，尖顶分支曲线正是突变折叠面的投影。

需要把图4.18与图4.16的b结合起来考虑，图4.16—b所示的非稳定位置正好是图4.18的折叠面尖端，在这种远离平衡非线性区，状态因子受两方面吸引子的吸引（参见前述势函数），一方面有可能继续受物价稳定区的吸引下发生通货

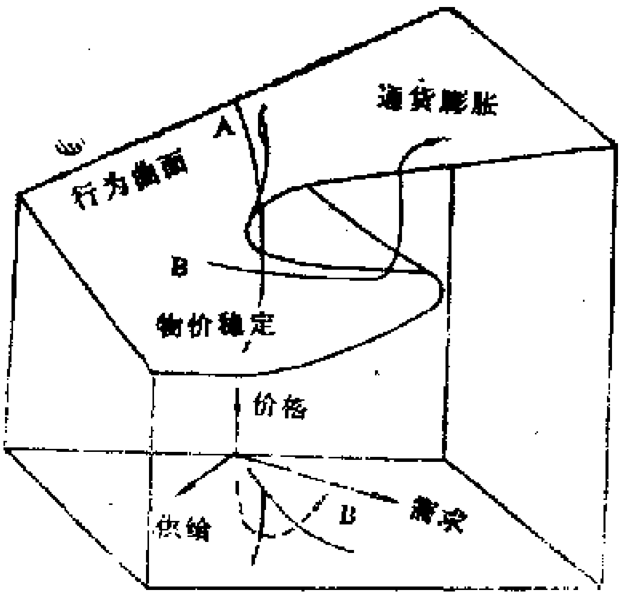


图4.18 尖点突变模式

膨胀（如图4.18轨迹A），也可能突变至通货膨胀区（轨迹B）。

在现实经济现象中，涨落的因子很多，而凯恩斯的均衡分析中所使用的涨落因子是十分有限的，这也就是他的理论在应用上必须有许多的补充条件，而突变论与耗散结构论的经济解释，比起前者更为灵活，有较大的实际意义。

怎样利用突变理论与耗散结构理论预测未来经济的进化，这是一个正待开发的边缘地带。当然，每个科学工作者可能从不同的角度提出方法。这里认为用建立势函数的方法较可行，其中的关键在于对涨落的预测。涨落是随机的，究竟经济生活将受哪些最可能的涨落影响呢？应该认真开展这方面的研究。这种意义是不言而喻的，谁在最近发生的石油价格暴跌（也是一种涨落）事件之前有所预测，谁就可以及早地找出有利于自己经济发展的策略。

§4.6 突变理论在理论医学上的应用

1. 在中医学上的应用

在现代科学还不能充分认识人体的生理和病理的今天，研究生理和病理的外特性是有着积极和重要的意义的，外特性的研究可借助于数学。祖国医学对人体生理、病理的外特性的认识是极精细、极深刻的，有很多内容还不能为现代科学所认识。可以说，祖国医学的理论基本上是外特性的理论，辩证论治本身就是一例。辩证论治以八纲即阴阳、表里、虚实、寒热为理论基础之一，又以阴阳为纲。所谓阴阳，据医书上说："阴阳者天地之道也，万物之纲纪，变化之父母，神明之府也，治病必求于本"。阴阳是构成一事物的一对矛盾，医书上说："阴平阳秘，精神乃治，阴阳决离，精气乃绝"。因而，正常的生理状态是阴阳调和的必然表现，阴阳乘和则为病，这就是我们要建的模型中的"吸引子"。所谓"吸引子"，指事物将自动趋向的稳定状态。它象磁石一样，将其影响范围内的磁性体吸向它，对简单的静平衡系统，"吸引子"指单个的稳定状态，如弹性系统的最小能量状态。在动平衡系统中，"吸引子"是指很多状态的稳定循环。例如，一根受到激振的琴弦，会以其自振频率不断作重复的循环，在这里，自振频率就成为一种"吸引子"。病变化虽繁，但其主要机制不外乎邪正相博和脏腑功能的失调，脏腑的功能正常旺盛则正气充沛，当理解到对脏腑经络功能的一切障碍为"邪"时，病还是不病的状态就为两个互相对立又统一的因素"正"与"邪"所决定，正气的

盛衰，脏腑功能的强弱可认为是连续变化的，“邪”也有强弱，亦可视为连续变量，阴阳失调则病，我们对于病有明确的准标。病有轻重，由病到不病与由不病到病都是突变。例如在酷暑的季节，一个体质健壮的人可以不得暑病，但体质可以逐渐下降，而一个得了暑温病的人，体质可以逐渐增强，这说明我们讨论的对象（人体的病还是不病的状态）不仅具有双模态性也具有发散性和不可达性，这是显然的。于是，可以用尖点型突变做为辩证论治的一个总模型（如图4.19），在图4.19中，行为曲面是由“正”占优势的高数值区域向“邪”占优势的低数值区域做整体性倾斜的，行为曲面越低表示病越重，据此几何图形可以看出，要使一个患病的人恢复健康应以扶正为宗，祛邪旨在扶正（这与中医治疗学中的“扶正祛邪”一致），切忌不顾正气而乱用攻伐。事实上，这相当于在控制参数平面上提高“正”轴的数值是根本的目的。

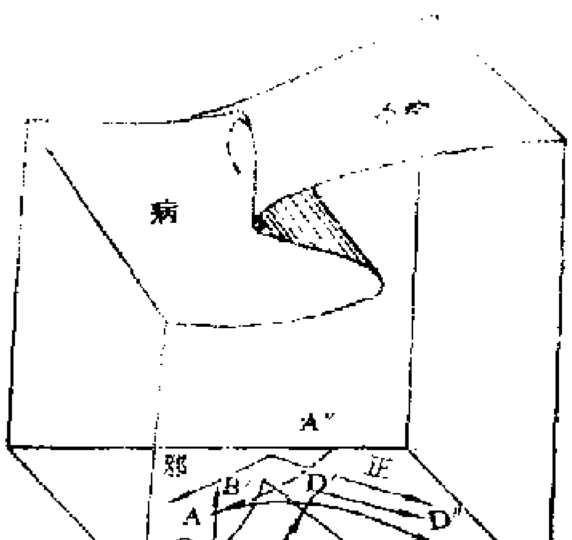


图4.19

所谓扶正，是调和阴阳，恢复脏腑功能，据中医内科医生说：“运用切脉诊断出内脏的病变和经络的异常，经过针刺调整内脏和经络的异常，使之恢复正常，经常不断地调整病变的内脏和异常的经络，使它保持正常状态，就会激发体内抗癌物质与癌作斗争”，这事实上也在讲提高“正”轴的数值是

根本的目的。

治病求本，急则治标，标本兼顾的治则是对各种复杂情况所采取的调和阴阳的措施，在本模型中只具有说明扶正祛邪的手段的意义。

由几何模型上可见，实现$D \to D'$也是一种治法，但必须完成$D' \to D''$，否则又极易重新生病而变得更坏。除了对那些“邪”盛而“正”尚不甚衰败，传变又极迅速的病之外，这不是一种好方法，因为实现$D' \to D''$常常是十分困难的，即所谓虚不易补；而且如果掌握得不好致使D过低，变故又会丛生。

如果对一个病人施行$B \to B'$治疗过程，则病人将有生命之虞，轻者也将导致病情加重，或成坏病。

2. 在西方医学上的应用

齐曼和海维西用蝴蝶型突变建立了神精性厌食症的数学模型。这种疾病的患者。交替地在绝食和贪食两种极端的行为之间飞跃，为了使患者由飞跃转入正常的渐变状态，齐曼和海维西通过催眠引进使病人安心的控制变量，将病人的状态由绝食和贪食共存的突变区引入有催眠状态的口袋形三值区，再从中间叶光滑地引入口袋后面正常的渐变区。

科学发展有一个很奇怪的特点，那就是远离我们自身方面取得了飞速的发展，而对于自己，特别是象大脑这样重要的器官，研究工作反而十分落后。当宇宙飞船在星际空间进行着精密的科学考察时，我们对自己的脑子却仍是不甚明了，更没有改造它的手段，我们的感觉、知觉、学习、记忆和思维的能力与千百年前的古代人相比并无什么显著的改进，因此，人脑被称为黑箱，世界上有许许多多科学家、学

者正在辛勤地探索人脑的奥秘，试图把黑箱变成白箱。齐曼应用突变理论建立了人脑的数学模型，用以对人脑的构造及如何思维进行研究，如果人类对这方面有所突破，将会给人类带来巨大的效益，我们将大大提高自己活动的能力，更有效地控制人类的行为，消除智力和精神方面的病患，创造更为先进的科学技术，改造世界，改造自然。

此外，癌变也是一种突变现象，因此也可以期望用突变理论对癌病进行研究。

据科学通报1978年第9期报导，国外曾有人对某种精神失调的病理现象建立了一个"蝴蝶型突变"的模型，在治疗中，增加模型中的"蝴蝶参数"，逐步开辟了一个该病症临床反应中轮流出现的两个极端反复之间通向正常状态的折衷通道，取得了疗效。齐曼还构造了心搏、神精冲动传播，胚胎中胚囊等突变模型。

§4.7 突变理论在生物学、生态学的用应

我们知道，数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学，生物学是研究自然界中生命活动的科学，虽然这两门科学都是古老的科学，但长期以来，这两门学科却相互往来很少，也很少有数学家，兼搞生物学的，这种情况一直延续到十九世纪。恩格斯曾说过："数学的应用，在固体力学中是绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中就已经比较困难了；在物理学中多半是尝试性的和相对的；在化学中是最简单的一次方程式；在生物学中＝"0""（见《自然

辩证法》），但这是一百年前的情况。

随着生物实验手段的改进，光学、电子学等观察、测试和记录设备的广泛应用，生物学实验中逐渐积累了大量的数据，从而使得生物学由一门定性的、描述性学科走向定量的精确的学科，四十年代末期电子计算机的发明和随之而来的大规模的推广应用，为生物学与数学之间的相互渗透提供了良好的条件，原来两门关系不甚密切的科学，现在发生了越来越密切的关系，在应用数学中形成了"生物数学"这样一种有一定独立性的数学分支。于是，在生物学中，从分子生物学、细胞生物学直到生态学等，都运用了数学方法。微分方程开始在生物学中大量的应用，然而还是限于连续变化的现象，但在自然科学中，不连续性早在本世纪初已被汤普森明确地指出："不连续的原理是我们所有学科种类中的固有特性，不管是数学的，物理学的还是生物学的"。1900年德国物理学家普朗克提出能量量子的假设，说明能量分布的不连续性。同是在1900年，孟德尔的遗传理论再次被发现，又打破了生物学中物种进化连续性的观点。达尔文认为生物进化是连续的量的积累，不同物种之间都存在中间类型的过渡。从孟德尔的基因理论却引出相反的结论，在生物学中，基因相当于量子力学中的普朗克常数，一个基因的改变引起相应的生物突变，可以看作是生物进化的最小单位。我国著名遗传学家，北京大学教授李汝祺写道："一切生物个体变异的起源，都来自基因的突变，突变的结果怎样呢？它既能使生物产生微小逐渐的改变；也能产生巨大飞跃式的变化；甚至还能产生使生物个体不能完成发育的致死突变"，（见《百科知识》1980年第10期）。著名奥地利量子物理学家诺贝尔奖金获

得者薛定谔(Schrodinger)指出：“突变实际上是由于基因分子中的量子跃迁所引起的。”他把这两个不连续的理论统一起来，开创了“量子生物学”。这个统一说明，不论在生命科学或者非生命科学，从连续到不连续是普遍的原则，作为自然科学基础的数学，它能够描述物质运动量的连续变化，也应该能够且必须描述质的不连续变化。因此从连续到不连续是数学发展的一种趋势。托姆的突变理论可以用来解释形态发生学中的一些现象，托姆本人最初就是从研究胚胎学开始的，他在其著作中论述了许多，后经齐曼等人的发展和完善，突变理论在心理学，生理学，生态学和组织胚胎学的应用中获得成功，生物学中许多不连续的生命现象到生动的描绘。象拓扑学这样在生物学中突然大放异彩的数学分支，在过去却一直是被人们看作毫无应用价值的抽象数学而受到冷遇的。我们现在举一个齐曼在生物学方面的例子，齐曼是用一次波、二次波来说明某种的发生生物学的现象。我们从一次波、二次波的概念讲起。

首先，从具有适当的生物条件的细胞壁开始，利用突变理论来说明一次波的发生。

我们考虑在广阔的土地上草和树的生育问题，所考虑的土地如图4.20所示，其北侧适合草的生育，南侧适合树的生育，青草力图扼杀树苗，而树木只要发育长大，它就能用阴影来抑制青草，故一方的生育抑制另一方。

以时间为横轴建立直角坐标系，以起始点时刻$t=t_0$为坐标原点，现在假设，最初森林在一土地的南侧，由南向北逐渐减少，草却逐渐增多，最后成了草原。如果在时刻t_0，树和草从南向北是连续分布的（参看图4.20），然后，假定在

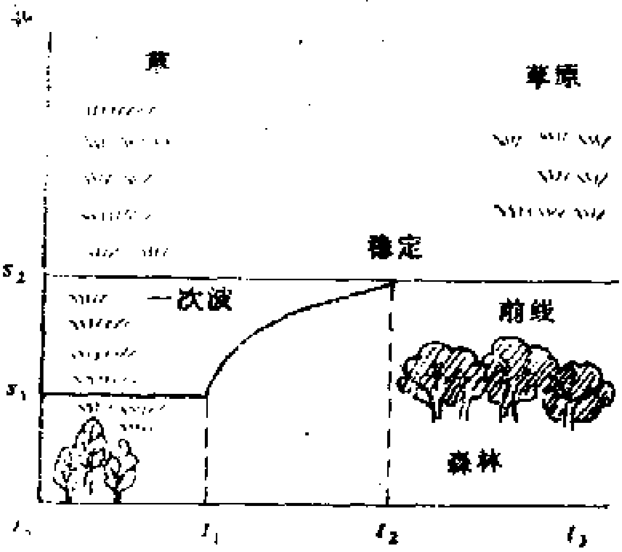


图4.20

时刻t_1，在s_1的地方出现的前线，这里所谓前线，是指 森林和草原的边界。因为在时刻t_0，树和草的分布是连 续的，所以没有前线。但在南侧树增加而草减少，在北侧则相反，草逐渐增多树减少，而树、草南侧的分布逐渐单一，使森林的区域和草原的区域模糊不清的地方清晰了，因而出现了前线。这个前线随时间的推移而变化（例如向北方变化），齐曼称前线的运动为一次波，连续北移的一次波的速度逐渐缓慢下来，到了时刻 t_2，s_2的地方停止下来。也就是一次 波趋于稳定，因而确立了森林和草原轮廓分明的边界。

继一次波之后，在草原和森林中各种花、虫、鸟慢慢地出现了。这些花、虫、鸟的出现齐曼称之为二次波。因此，二次波也可以说成一次波的从属波。

从这个例子可知，一次波的发生 与 以 下 四 个 条 件 有关：

（1） 内部环境稳定：每个细胞都处于稳定的生物化学

平衡状态，虽然这种平衡状态可以随时间而变。在本例，草和树就时间来论，保持稳定平衡。

（2） 连续性：当实验开始时，不同细胞中的化学、物理和动力学条件可用细胞在组织中位置的一个光滑函数来表示。这种连续性意味着相邻细胞会尽可能地按相近的途径发育。本例，在初始时刻t_0。草原和树的分布是连续的，而且在全体细胞中化学、物理和力学诸条件也是连续的。

（3） 分化性：尽管在实验开始时只有一种类型的细胞，最多它们的性质有一个光滑的变化，但在实验结束时却有两种类型截然不同的细胞，两者之间有一个明显的界面，而它从一种类型连续地变成另一种类型。在本例，最后土地成为草原和森林。

（4） 反复性：过程结构是稳定的。在本例，当时间、空间的初始条件少许变化时，仍然出现相同的现象。细胞的发展是稳定的，也就是初始条件充分小的变化，不会引起实质性的变化。

在这四个条件下，一次波的发生由下面的突变定理来保证。

一次波定理 由多数细胞连接构成的具有内部环境稳定的组织，最终总能由前线分化为两种不同的细胞。

我们进一步来说明一次波定理，首先由各细胞的状态给出n维欧氏空间R^n的一个子集Z，用s表示在土地南北线上的区间，而t是从t_0开始的时间间隔。如果$C=S\times T$，则C是平面R^2中的矩形。这时，在上述的四个条件中，就数学来说，有势函数

$$V=C\times Z\rightarrow R$$

这里$C\times Z\subset R^2\times R^n=R^{2+n}$，对于$(s,t)\subset C$给出函数$V_{(s,t)}(x)$的极小值$x$，可以看作$(s,t)$的细胞的稳定平衡状态。由条件（4），$V$可解释为结构稳定的。如果$(s,t)$的各细胞的稳定平衡状态为$x$，设$[(s,t),x]$的集合为$G$，则由托姆定理可知$G$是势函数$V$的平衡空间，是$C\times Z\subset R^{2+n}$内的曲面。

在图4.21中，因为在时刻t_0沿s上的细胞分布是连续的，所以在控制平面²上线段$s\times t_0$上方的G的部分是曲线段ab。但在时刻t_3时，出现了两个不同细胞A，B。因为A，B不是连续变化的，所以在线段$s\times t$的上方是两个分离的曲线A和B，因为控制变量是s和t，即控制变量的个数为g，所以根据托姆分类定理，势函数是尖点型。即图4.22中曲面M_v（即图4.21中曲面G），它是尖点型曲面，然后利用突变映射x把M_v

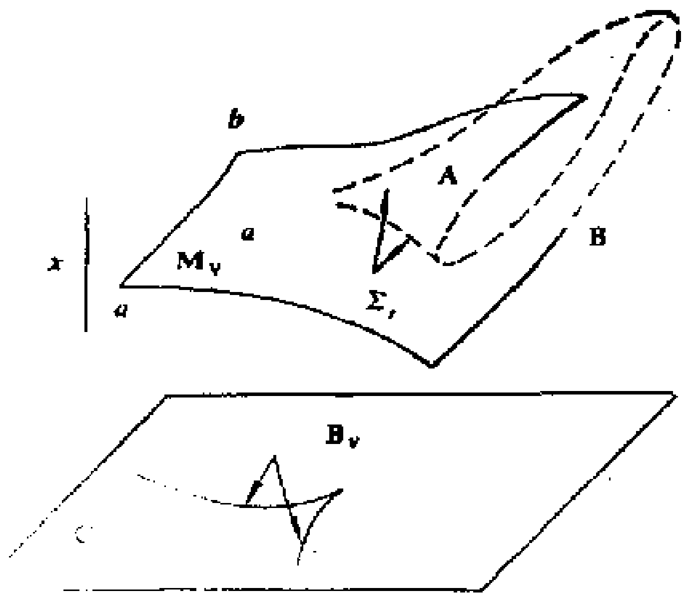


图4.21

的折迭曲线影射到C上得分歧点集合B_v，即图4.20中一次波那样的图象。

我们再进一步讨论在时刻t_0。由s出发的在控制平面上的道路，在M_r上是什么样的情况。

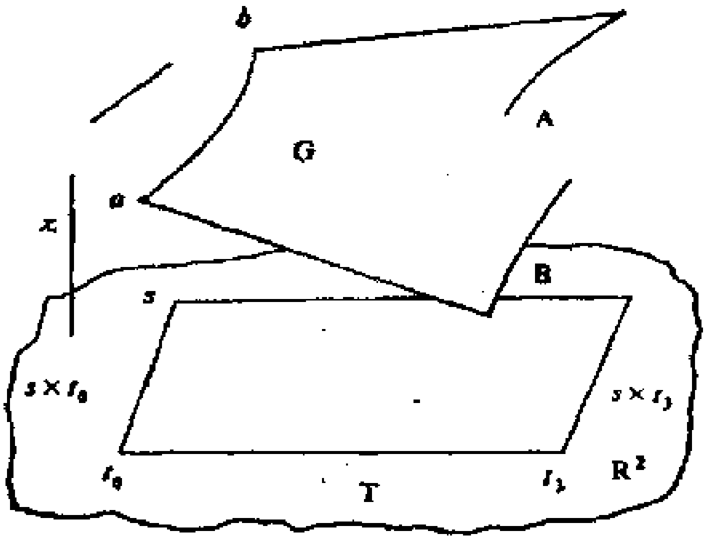


图4.22

如图4.23在t_0时由点s出发的控制平面上的道路，在时刻与一次波的图象相交。与这个道路对应的M_r上的道路在(s, t)的上方，由M_r的点P沿双箭头向Q的方向发生突变。由此可知，前线在时刻t_1，从s_1的地方向s前进，速度逐渐缓慢下来，到时刻t_2时，在s_2的地方稳定下来。

突变理论在生态学的应用也比较成功，如在形态形成中，控制生物体细胞分化的条件是生物体内化学物质的浓度，它们在时间和空间上都是连续变化的，但为什么在不同的位置上会出现不同的细胞，出现空腔和不连续的分界面呢？这可用突变理论来解释。在形态学上，蝴蝶可在空间中表示为一个小穴，而在时间关系上，它相应于给予或收受，或者充满或掏空一个小穴，图4.24为蝴蝶型突变加上麦克斯韦尔

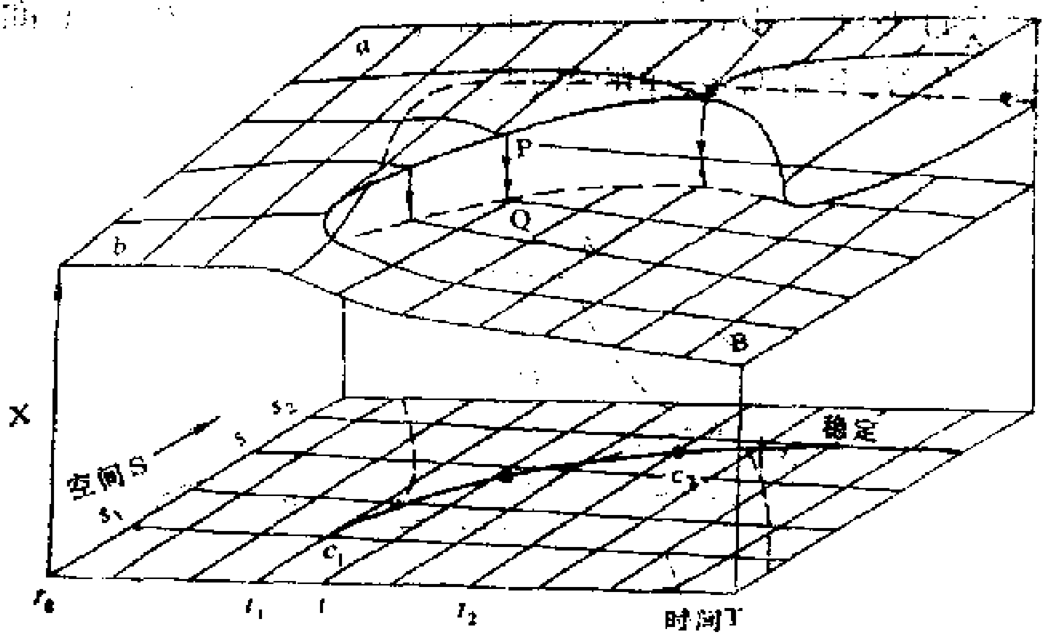


图4.23

惯例而得出的，它可以来解释胚胎形态形成时为什么会出现一个空腔。

再如，对于捕食者及其被捕食者之间的相互作用的数学研究，可追溯到二十世纪二十年代，当时有一位意大利生物学家柯纳（d'Ancona）对亚得里亚海的捕食者——被捕食者（例如大鱼吃小鱼）相互作用而引起的群体消长情况。长期

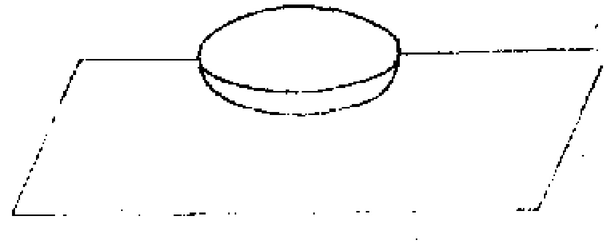


图4.24 一个小穴

以来用"洛特卡——尔伏泰拉"微分方程组（Lotka—

Volerralquations)

$$\frac{dH}{dt}=aH-\mu HP$$

$$\frac{dP}{dt}=\gamma HP-\beta P$$

这里H是被捕食生物体的数目，P是捕 食 者的数目，它们都是时间t的函数，而所有希腊字母都 表 示 常数，都得不到满意的解释，而用尖点型突变的预测却与实验很好地相符。

类似的例子，设捕食者为山猫，被捕食者为山兔。山猫吃了山兔，由于山猫有用于繁衍所必需的食物，山猫的数目就会增加。这样一来，山兔的数目便随着减少，接着由于食料短缺，山猫的数目不断为减少。由于山兔同山猫相遇的机会减少，结果使山兔的数目又逐步增多。随着山猫的数目又再次增加，而山兔的数目又一次减少，如此周而复始，不断循环，这两个群体的消长情况，同样也可以用尖点 突 变 来 描述。

突变理论除了在物理学、化学、生物学等领域已有很多十分重要的应用外，它在生态系统分析中还有较多的应用实例，在此仅举几例。

经典的Verhust—Pearl的种群增长Logistic模型是

$$\frac{1}{N}\ \frac{dN}{dt}=a-bN$$

其中N是种群密度，a是内禀增长率，a/b是 环境负荷能力。为了使模型接近于真实，可假定存在一个阈值密度。在阈值密度下，个体间互不干扰，且在低密度外，雌性找到配偶的机会与密度成正相关，而死亡率与密度无关。因此，在阈值

密度下，种群的个体增长率应是密度的增函数，而在阈值密度之上则是密度的减函数。于是Logisitic模型应修改为

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dt}=a+bN-cN^2$$

$$=r-(cN^2-bN+d)\ (令a=r-d)$$

$$=r-\phi(N)$$

这里r为种群在特定自然环境（如温度、湿度、光照、食物等）下的增长率，$\phi(N)$为种群的反馈机制。当系统平衡时，

$$r-\phi(N)=0$$

把它写成

$$(N-a_1)^2+a_2-P=0$$

其中　$a_1=\frac{b}{2c}$，　$a_2=\frac{4cd-b^2}{4c^2}$，　$P=\frac{r}{c}$。

如果把P作为控制变量，N作为行为变量，则上式表示了一个典型的简单折转型突变流形（如图4.25）。

根据此突变模型，可阐明若干生物种群生产力的规律问题，即应如何开采才能获得稳定且持久的高产，而不致破坏种群恢复再生产的能力。

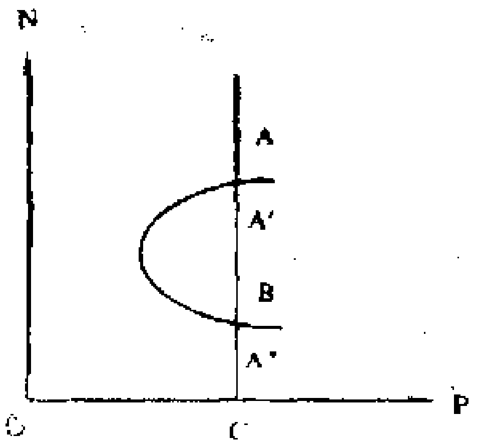


图4.25

对于有害生物，则是如何防治使它不致回升到危害水平。Ricker(1954)的研究结果表示：对某种种群的增长曲线，随着开采率增大，种群丰盛度升高，60%的开采率使丰盛度达到最高水平，再增大开采强度反使丰盛度下降。就防治害虫而论，防治强度由10%增至60%反使害虫密度加大只有使防治强度增加到一定水平（例如75%）才能控制虫口密度于危害水平之下。这个结论和翟连荣等人用种群突变模型作定性研究的结果是一致的。

应用突变理论对森林生态系统进行分析，D.DJones已作过研究。

云杉卷叶蛾在东加拿大地区有40—70年的发生历史。当数量很低时，云杉蛾是一个稳定的密度水平。随着森林逐渐长大，云杉蛾种群就进入了大发生时期，延续了3—4年。它的密度可增加5个数量级。但在高密度下，所有的新叶子和某些较老的叶子在广阔的森林常被消耗殆尽。叶子经过这样严重的4至5年的破坏，树木大量死亡。这时在下层主要是年幼的云杉树，它们有效地避免了云杉蛾的攻击，且由于上层亲代的死亡，而被"释放"出来，快速地生长。而在这期间，云杉蛾面对捕食者、寄生天敌、疾病、食物和产卵场所的减少等因素。种群又迅速地下降到原来的固有水平。整个大发生周期延续7—14年。如果选择云杉树的幼虫密度作为行为变量，森林中可利用的叶簇的定性的量度为控制变量，则构造了云杉蛾大发生的一个折转型突变模型（如图4.26）。通过对突变流型的分析可解释大发生以及采取防治措施中出现的种种现象。如果把林中每单位云杉蛾可利用的栖息地总量（如单位面积里树枝的面积）和单位树枝面积上可

利用的叶簇总量(表示食物)作为两个控制变量，那就可构成一个尖点型突变模型（如图4.37）来解释大发生情况。

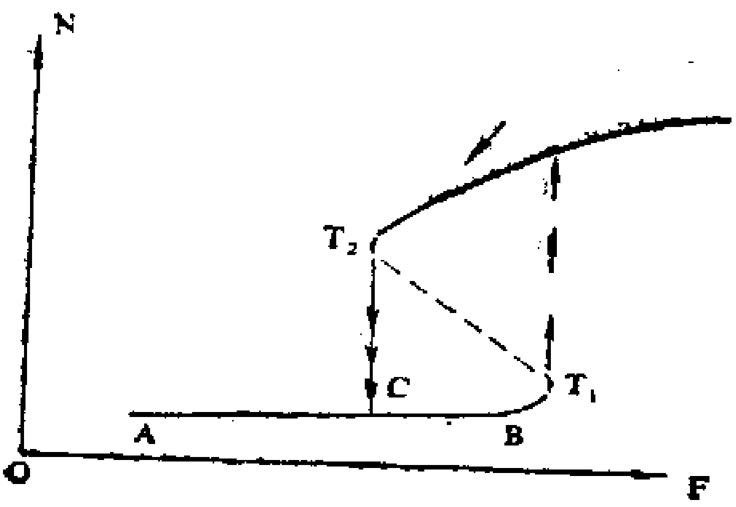


图4.26

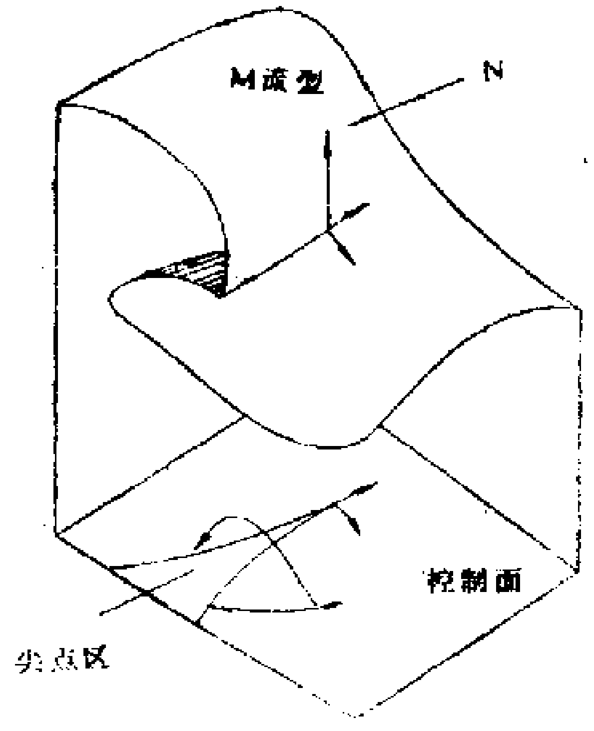


图4.27

另外，D.D.Jones和C.J.Watlters用突变理论研究了渔业开发系统是一个成功的例子。对渔业开发系统，可以选择下面这些变量：

（1） 生物群体大小，它可由几个不同的取样单位来测量，也可能是由几个不同的地理位置的亚群体所组成的，甚至是许多种的混合体。

（2） 捕渔投资水平，它可由捕渔船队的大小（如数量）来测量。

（3） 技术和经济效率，这可由捕获率，每船的容

量以及连续捕捞仍然有经济意义的最低种群大小形式来表示。

净生产量=生长+补充-自然死亡。净生产量曲线与一定投资水平下的捕捞量曲线的交点表示平衡点，其相应的群体大小称为平衡群体大小。在低效率时，只有一个平衡大小。但在高效率时，却有三个平衡群体的大小，其中两个是稳定的，中间的一个是不稳定的，这时开发系统成为具有三个平衡态的系统。经过分析把船队的大小和捕捞效率作为两个控制变量，它们都随着时间变化而变化，把平衡群体大小作为行为变量，这就可构成一个尖点型的突变模型(图4.27)。

南极鲭鲸群体，在1930年以前，渔业主要是靠扩充船队来发展的，而效率是相当低。这时不出现明显的突变，此现象一直延续到30年代后期。第二次世界大战期间，由于捕渔船队的破坏，以至使鲭鲸群体的大小有所回升。第二次世界大战后，捕渔业有了进一步发展，技术和效率日益提高，这造成50年代，60年代群体大小突然下降。以后捕渔量受到限制（主要是被定额所限而不是被船队容量所限制）。鲭鲸数量又有所回升，直至1975年。另外，由于使用拖网渔船，热带鲔鱼开发系统几乎都有进入尖点型突变流型的尖点区（突变集）内的可能。这样，只要投资对策稍有改变或者捕获定额没有迅速加以调整的话，就会导致突变，使渔业开发失败。这些情况都可用尖点型突变模型给以阐明。基于突变论的分析，还可提供预防性的政策措施。如：（1）强令降低捕鱼效率或维持低效率，使系统避免进入尖点区；（2）采取措施使尖点区变宽以扩大捕获水平的范围；（3）采取措施使尖点型区变窄，允许发生小的突变而避免大的突变。这些办法

除（3）外，在关于渔业开发、管理的文献中都有介绍。太平洋鲸类开发系统已用过(1)措施，目前是采用(2)，（3）本质上是一种适应性的管理办法，它允许小突变。这些办法对于决策者来说都是有价值的。

突变理论在生态系统分析中的应用，在国内外都还仅仅是开始，仍处于探索阶段。我国李典谟、丁岩钦、蓝仲雄、郭绍礼等人在这方面作了大量工作，感兴趣的读者请看参考文献提供的书目和材料。

§4.8 突变理论在哲学上的应用——突变理论与“质量互变规律”

一百多年前，德国唯心主义哲学家黑格尔(Hegel)，由大量的现象中概括出从量变到质变的概念，揭示了由一种质态到另一种质变的规律。黑格尔认为量变是渐近性的运动，量变在一定限度内并不影响质，但是量变积累到一定程度时，就会引起质的突然变化；质变表示渐近运动的中断，使事物出现飞跃的发展，是一种突变。而渐变和突变又受到一定条件的影响和限制，这叫做“质量互变规律”。十九世纪马克思和恩格斯继承了黑格尔的辨证法，在近代大工业和近代自然科学成果的基础上，对哲学实行了伟大的变革，达到了辨证唯物主义，恩格斯则进而创立了“自然辨证法”，认为质量互变的规律是存在于自然界一切变化和发展过程中的普遍规律，是辨证法的基本规律之一，恩格斯在《自然辨证法》中曾写道，这一规律“无论在生物学中，或在人类社会历史中，同一的规律在每一步上都被证实了，但是我们在这

里只从精确的科学中举出一些例子，因为这里的量是可以精确地测量和追究的。”但遗憾的是，一直没有出现阐述这种由量变到质变的数学规律，托姆的突变理论把人们几百年来关于由量变到质变的经验总结成数学模型，是从量的环节或侧面来表现这种变化规律的。突变理论的基本思想是深刻的，它是从研究结构稳定性开始的，突变理论的创始人托姆通过对稳定性的研究，得出了一种对事物的变化有深知灼见的理论，广义地回答了为什么有的事物不变，有的渐变，有的则是突变。这样一来源于对事物的洞察的理论，是一个意外的出发点，是托姆所始料不及的。

我们已经知道，所谓稳定性，不仅指事物不变，而且还指事物有一定的抗干扰能力，或者说当干扰使事物偏离稳定态时，事物能依靠某种作用回到稳定态，前已说过，不倒翁的直立状态就是一个稳定态，不论干扰从那个方向使它发生偏离，它都能回到这一状态，同理，处于一洼底部的小球的位置是稳定的，放在一突起顶端的小球的位置是不稳定的。实践证明，任何事物的稳定态必是处于某个“洼”的底部，不过，大多数事物的稳定态的“洼”是看不见的，它是指抽象空间中势函数的洼。从数学角度来说。“洼”就是势函数的极小值点，而稳定性就是函数趋于极小值。

从物理学角度看，自然界存在的任何物质由能量上讲必须具有稳定性。例如由两个氢原子组成一个氢分子，两个氢原子之间的距离必定是使势能量最小的距离 R_0(图4.22)，这样的结构是氢分子结构中最稳定的结构。这一位置一定处于氢的势能函数的洼之中。为什么呢？因为干扰是无处不存在的，如果氢分子的能量(由原子之间的距离 R决定)比邻近结

构离，那么任何一点外界干扰都会使氢分子发生变化，放出能量，原有的结构也就不能稳定地存在。氢原子之间的距离最终将趋于势能曲线洼的最低部，达到稳定态。

图4.28这条曲线又叫做氢原子距离的势函数曲线。势函数具有更广泛的定义，对自然界不同的过程，势函数的物理意义是不同的，不同势函数的洼都表示事物的一个稳定态，洼底的位置是稳定态的位置，洼越深意味着相应的稳定态越稳定。图4.28曲线只有一个洼，意味着氢分子只有一种稳定的结构，图4.29曲线有三个洼，它表示水的自由能曲线，三个洼分别代表水的液、固、汽三种稳定的物态。

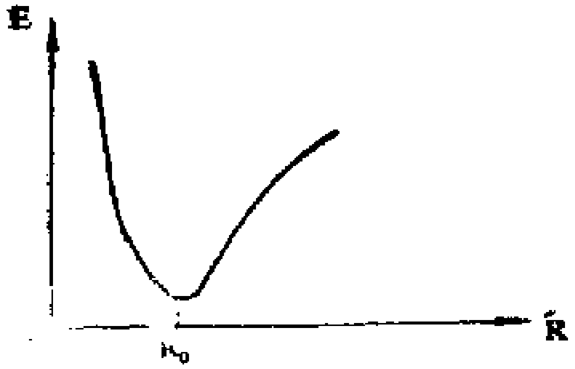


图4.28 氢分子的势能

为什么一事物能稳定不变？回答是因为它处于某势函数的洼中。正如在洼之中的小球那样，微小的干扰使它偏离洼底时，它依靠自身重力能迅速回到洼底，而不影响它的结

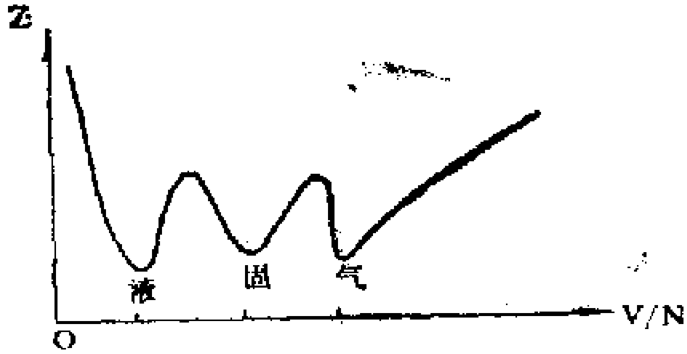


图4.29 水的势函数曲线

构。这就是对事物稳定性的理解。进一步分析，事物的渐变与突变过程也可以从洼的移动和消失（转移到另一个洼中）来解释。我们来分析一个典型例子，对一个直立的长方形木块施加一个推力F，假定木块的支点因摩擦作用不动，那么在F的作用下，木块逐渐倾斜，木块底边与地面的夹角θ逐渐增大，当木块倾斜到某一个角度θ_0时，渐变过程中断，木块突然翻倒，夹角θ一下子从θ_0飞跃到90°。这是一个在推力F的作用下，木块的角度先是渐变，而后发生突变的过程。这一过程完全可用势函数的洼的变化过程来描述。

设木块在没有推力F作用的情况下，只可能处于直立或横立两个稳定的状态，也即是说，θ角的稳定态只有0°和90°。无论木块开始时倾斜成什么角度，最后要么直立、要么横立，别无选择。如果我们画出木块在前后几次翻倒运动中重心的轨迹，便得到图4.30那样一条曲线，它由几条圆弧组成。这条曲线也就是木块的势函数曲线。它有两个洼，洼的位置A和B对应着木块直立和横立两个稳定态。

在推力F的作用下，木块的势函数曲线就逐渐发生了变化（图4.31）。可以看到，随着θ的增大，A洼逐渐变浅，向前移动。在0°到θ_0之间，木块的重心由A转移到A_1、A_2、A_3，

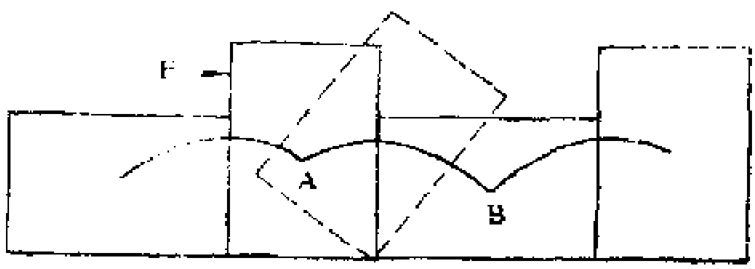


图4.30

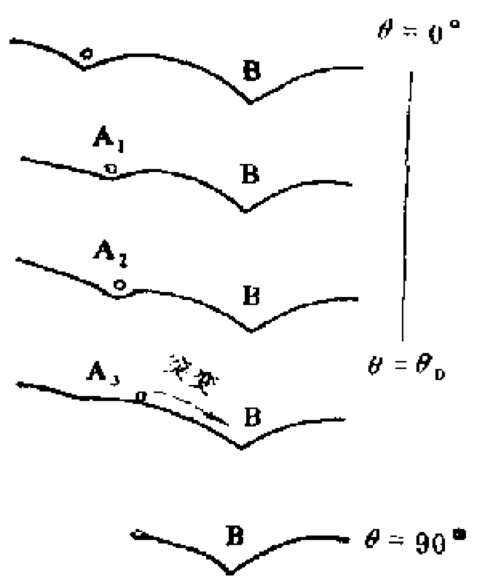


图4.31

当木块重心移到A_3位置时，A洼消失，势函数曲线只剩下B洼，这意味着木块由第一个稳定态过渡到第二个稳定态，重心由A_3跃到B，夹角相应地由θ_0翻到90°，突变发生。

这个例子说明了以下几个问题：

（1） 当势函数的洼不变时，事物处于稳定不变的状态。

（2） 当条件的改变引起函数洼的移动变浅时，因为我们无法看到洼的变化过程，我们只看到事物发生渐变。势函数洼越浅，事物越不稳定。

（3） 当条件的改变使势函数旧有的洼消失，事物的状态从不稳定往新洼过渡时，事物发生突变。旧洼消失的那一点，就是飞跃的关节点。

对于形形色色的突变过程，尽管它们的具体内容千差万别，但突变都是在它们自身的势函数的某个洼消失，致使系统向另一洼转化时发生的。因而，不同的突变过程可以用统一的模型来处理。实际上，图 4.27所示的突变模型并不神秘，其中行为曲面只是显示出不同条件下势函数的洼的位置而已，在折迭区，势函数有两个洼，而在折迭边缘，一个洼消失了，突变过程必然在这里（关节点）发生。

突变理论对哲学有那些重要启示呢？

第一，突变理论用数学表明了，质变的关节点不仅仅是一个点，而是一个过渡区，对于同类突变过程，关节点(区)的形状取决于突变模型。如在尖点型突变，关节点是一个尖角，象图4.25中，在行为曲面的折迭区，事物可能有两种不同的稳定状态，质变只有在这个区域才能以飞跃方式进行，因此它也是质变过程中有可能出现关节点区域，这个区域叫双值区（如§4.2，图4.7中的麻口铁出现的区域），双值区也是事物出现双重行为的区域。

第二，突变理论把人们千百年来的关于质变的经验总结成数学模型，为进一步认识质态转化的辨证过程提供了科学依据，使我们有可能供助一些新的语言来回答长期以来哲学上关于质变问题的争论，即质变究竟是通过飞跃还是通过渐变来实现的？

第三，突变理论告诉我们，质态的转化既可通过飞跃来实现，也可以通过渐变来实现，更重要的是还指出在什么控制条件下质变是飞跃的，什么控制条件下质变是渐进的。如从模型中我们可看到，一个质态转化过程如果控制曲线穿过折迭区（包括双值区，三值区等）就会发生飞跃，如果绕过折迭区，变化就是渐近的如第三章所讲的气——液相变模型，在图3.3中沿AB线控制，水就会发生沸腾、冷凝等现象。沿CD线控制，绕过临界点Q，水就能够不经过沸腾而由一系列水、汽之间的过渡状态转化为气。这样我们就不难理解为什么在有的情况下只要改变控制条件，一个飞跃过程可以转化为渐变，而一个渐变过程又可以转化为飞跃，这种渐变与飞跃转化的现象是非常普遍的。经济危机在爆发时常常是一种突变，在复苏时却往往要经历一个缓慢的回升过程，这

暗示着相应的模型中有一个折迭区，危机爆发时各种控制因素将经济行为推入了这个折迭区，复苏时各种因素又使行为绕开折迭区，沿着曲面的连续部分回升。

原则上讲，对尖点型、蝴蝶型等偶次势函数突变，飞跃与渐变总是可以转化的。面折迭型、燕尾型等奇次势函数突变，有一些不可逆稳定态，突变理论指出：这类质变过程飞跃与渐变不一定能互相转化，这是值得注意的。

从以上略述可知，突变理论的研究对于深入讨论哲学上的质量互变规律，带来了积极的影响，尽管突变理论尚在深入探索之中，它不失为一种有益的尝试，我们以唯物辨证法为指针，深入研究和具体分析突变理论的优劣，从中获得"合理的内核"，用以推进质量互变规律的深入探讨。

§4.9 突变理论在社会科学中的应用

长期以来，社会科学被视为数学的禁区，托姆的突变理论既能应用于自然科学，又可以应用于社会科学，对许多社会突变现象，突变理论至少能做出定性的描述，但突变理论在社会科学中的应用还很不成熟，有许多争议。因为它涉及到如何定量化，如何将社会现象的突变归结为某种量的突变这样一些带根本性质的问题。齐曼和其他人对突变理论在社会科学中的应用，曾作过不少的努力，提出了一些社会突变模型。例如齐曼用突变理论来解释狗的行为，便是许多例示中最早和最有名的例子之一，饶有趣味。虽然一时也许说不上它能有什么实用性价值，但是从过去无法描述到有了一个描述狗的两种心理状态变化的模型，这本身就是一个突破，更不

能不说是一个重大的进步，许多人给予高度评价，下面就先从狗的行为谈起。

1．狗的行为

当你遇到一只陌生的狗，那么这只狗可能会怎样行动？它可能逃走，可能无动于衷，也可能会狠狠地咬你一口，这只狗的行为受到相互矛盾的两个因素控制：愤怒和恐惧，这两个因素除了用扎德(Zadeh)的模糊数学以外，现在还都无法定量表示；但愤怒程度可由狗张嘴露齿的大小来衡量，恐惧程度则可从狗耳朵的耷拉程度来测定。当恐惧压倒愤怒，它就可能飞快地逃走；当愤怒占优势，它就可能攻击咬人；但愤怒和恐惧都很高时，就可能发生突变；一只本来似乎要咬人的狗，会突然地掉头逃跑；同样，一只看上去将要逃走的狗，却冷不防突然地转身咬你一口。数学家用几何学中的曲面概念提供了它的模型。在这示例中，控制变量有两个，即愤怒和恐惧，状态变量是行为（如逃跑、退缩、回避、平和、吼叫、咆哮、进攻等），此外，又发现上述狗的攻击行为具有尖点型突变的三个典型性质：双模态、发散和不可达性，故可试用尖点型突变来拟合所观察到的现象。在平面图4.26中建立直角坐标系，x轴表示狗的行为，按逃跑、退缩、回避、平和吼叫、咆哮、进攻等次序在x轴上由下到上地排列，当然，这些行为用数量来描述至少目前还有很多困难，但是作一大概的刻划，给出定性的判断，还是可能做到的；又在坐标系中，a表示恐惧程度，b表示愤怒程度，也是同样只给出定性的判断。

图4.32表示的是行为(状态)曲面$x=V(a,b)$，底平面称为控制平面，表示两个相互矛盾的因子(恐惧a和愤怒b)的数

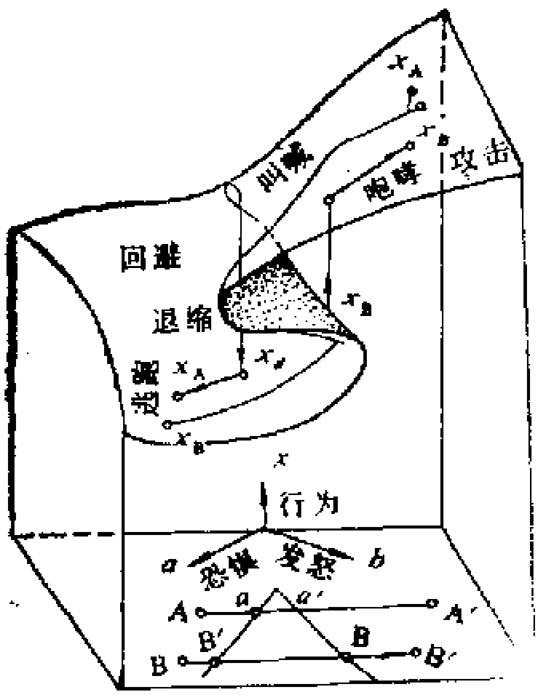


图4.32

值，标志狗的情绪状态，每一对(a, b)，对应一个行为值x，值得注意的是：在a和b数值都很高的一个区域之上，曲面出现了令人感兴趣的折迭，在控制平面上标出了折迭在底平面上的投影，即尖点型区域——分歧点集，当(a, b)处于该集内的时候，曲面有三层，即一对(a, b)对应着三个x的值，表示这时的行为不唯一确定，行为状态不稳定，或者说，行为状态出现了分歧点集，确定折迭边缘的线叫做折迭曲线，它在控制平面上的投影正是分歧点集的边缘，称为分歧曲线，所有这些说明都与第三章所举气一液相变模型所说的大致相似。

为什么这个模型能够用来解释狗的行为突变呢？先看A'—A路线，当因子处于A'时，愤怒程度高，恐惧因子较低，狗的行为以攻击为主，是稳定的。当因子改变，到达a'后，因子进入分歧点集，与A'相比，狗的恐惧程度a有所增加，愤怒程度b有所减低，但二者都相当高，这时狗既惊又恐，其行为处于可能攻击也可能逃跑的双重状态，即不稳定态。当因子改变到达a点时，曲面折迭部分到达边缘，这时如果再稍微增加一点恐吓，行为状态将离开折迭曲面的顶叶，突然跌到底下一叶，突变因而发生。当因子到达A

时，狗处于退缩状态——另一个稳定态。同样，因子(a, b)沿$B' \to B$路线走，那么x处于逃跑状态，然后到达B'处开始进入分歧点集内，狗又处于不稳定状态，因子变化到达B点时，x_B从底叶突然跳到顶叶，然后在x_B又处于进攻的稳定态。

上述狗的行为齐曼的几何表示见图4.33和图4.34。

在图4.33中，路径1和2分别表示愤怒或恐惧单独增加时的清楚效应，逃跑或咬人；路径3和4分别表示愤怒和恐惧同时增加时的双重含糊效应；可能攻击也可能逃跑。我们也发现尖点型突变的另外两个典型性质，突跳和滞后，例如，若狗首先被惊吓而后被激怒，它不会逐步变到有较多的攻击性。较为可能的是它仍然畏缩不前而后突然改变为攻击性的姿态，如果这个变化把它沿着行为轴线引到足够远处，其结果将是一个真正的攻击。而很少可能给予警告，从而看到了突跳，最后，一旦狗处于攻击的意识状态它将趋于维持，这样，即使愤怒已有所减少，我们还是能观察到滞后现象的（请参看图4.28）。

2. 决策

如果突变理论在社会现象中，仅仅用于说明狗的行为，那就不值得什么称道了，我们现在由狗转到人的行为，决策就是一例。关于决策，齐曼研究了一个特殊的例子，即与一个敌对国家冲突的一个国家政府，可以用“战争的代价”与“威胁”来解释“战争”与“和平”之间的抉择，我们知道，所谓“抉择”，也就是决策。

我们取威胁和代价作为控制变量，这里所谓代价，包括例如国内政治稳定局面的丧失。军事行动的实际财政开支

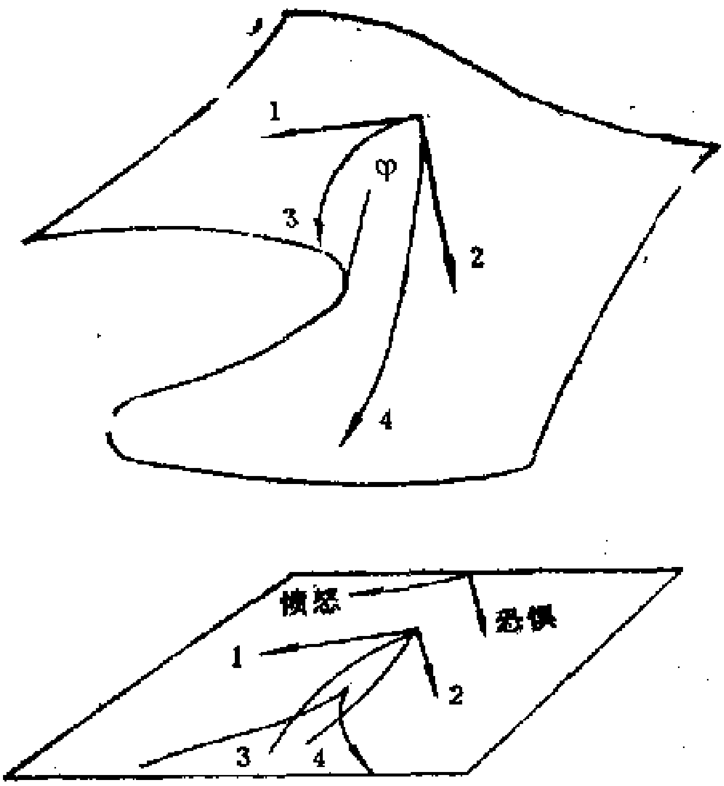


图4.33　狗对愤怒和恐惧的反应（1）

等；威胁的意义是通常下的意义。状态变量仍是所采取的政策的类型，其范围很广泛，如从很有攻击性的政策到消极的政策(如相互宣传等)，西方国家形象地称前者为鹰派，称后者为鸽派，因为有两种控制变量，一个状态变量，故可用尖点型突变来拟合，象齐曼用几何图形来描绘狗的行为一样，我们现在画出一个尖点，并来观察这个模型能提示些什么（图4.35），我们只画出控制平面，其中圆点表示跳跃之处。

路径1代表一个国家开始的谈判是威胁在增加而代价是低的，从而采取攻击性的姿态，或者如果战争已在进行，它

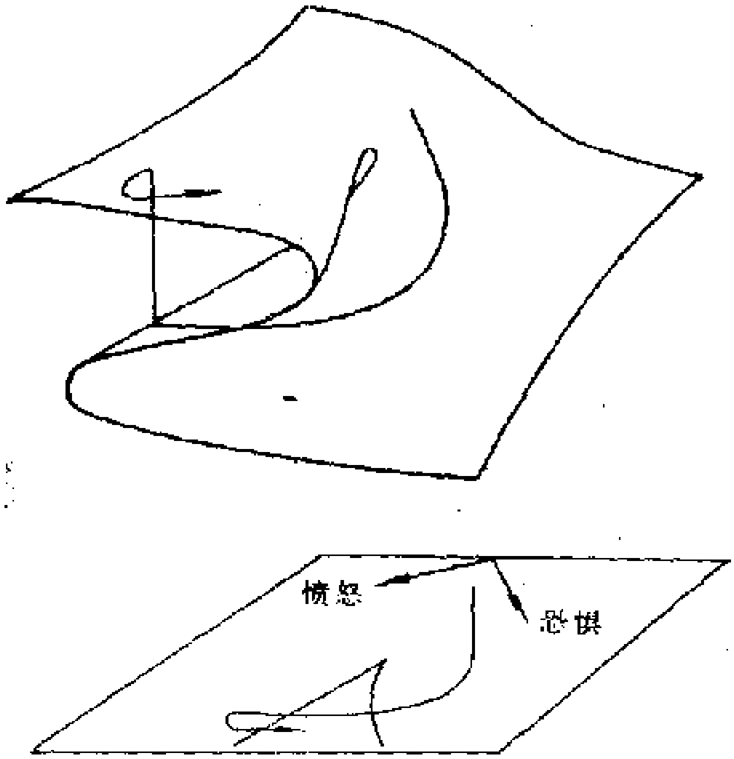


图4.34 狗对愤怒和恐惧的反应(2)

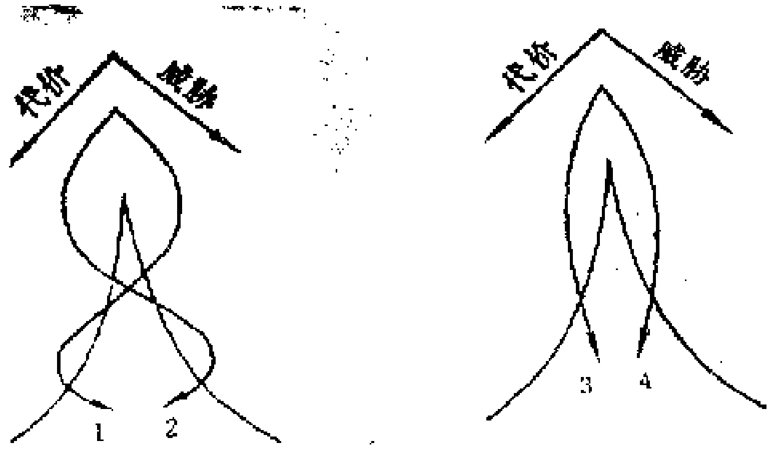


图4.35 一个政府对威胁和代价的反应

将倾向于把战争升级。即使代价开始增高，这种政策还会继续下去。若代价增高到超过一个确定的限制，而威胁大致不变，则有可能突然转变到一个较少攻击性的地位，真实的意

图将是退出冲突。这是一个突变，如美国介入越南的历史，包括未能对西贡的最后一次进攻作出反应而导致西贡陷落，便是这种性态的一个例子。

另一方面，路径2代表一个国家开始认为代价高而威胁小。因此它力图避免介入，它将保持这个政策即使冒相当大的风险。但若威胁变得太大，则有可能发生突变，即突然地转变到一个较有攻击性的政策，且这甚至能导致始料不及的宣战。例如，使德国作出决定于1919年入侵比利时和1939年入侵波兰的一个主要原因是，无论那一次英国都没有事先采取行动使德国人有理由相信英国会参加战争，或者英国一旦参战，便会不顾极大的代价而继续战争到底。

路径3和4代表对形势有大致相同的估计的两个国家，但它们却采取完全不同的政策。造成这种不一致行为的理由是当代价和威胁同时增加时，存在着保持与开始时同样的姿态的趋势，这种性态的一个例子是1962年古巴导弹危急，美国开始时就有攻击性并保持始终。

这个模型阐明了在这些情况下所需要的外交手段，如果当时美国人以入侵古巴相威胁使苏联感到威胁明显地增长，则将会有灾难性的结果，因为苏联人可能会到达平衡曲面的边缘而进入上叶。

3. 妥协

在以上的例示中，对一个严重问题的反应是沿着一个或另一个方向采取强烈的行动，而中间态度则因尖点型突变的不可达性而被阻断；然而，在许多冲突的实例中，尽管有强烈冲突的环境，却达成了妥协，对这些情况，尖点型突变是难以描述的，故试用蝴蝶型突变来拟合。

如第三章初等突变表所列，蝴蝶型突变也只有一个状态变量，我们仍取之为政策的种类，但它有四个控制变量，我们选择威胁和代价作为正则部分平面中相互冲突的变量。妥协将由中叶上的点来代表，用我们相信使妥协成为可能的任一主要因素作为蝴蝶因子，例如，若冲突持续时间足够长而哪一方都未能取胜，则可能会出现某种妥协趋势，那么，我们就可以取时间为蝴蝶因子。至于偏倚因子，我们可以简单地把它理解成通常意义下的偏倚，即与另一个政府相比时，某个政府对威胁和代价的反应程度的或多或少的倾向性。于是政府的改组就可能导致偏倚因子的变化。也可以选择其他变量作为偏倚因子，如齐曼等人取偏倚因子无懈可击。

我们以图4.36为基础来观察这一过程。开始时（未在图中画出），蝴蝶因子是正的，故实际上是一个尖点突变、发生的情况与前一个模型也很相似。我们假定争端尚未以某种方式定局，造成紧张的原因依然存在。随着时间的推移，蝴

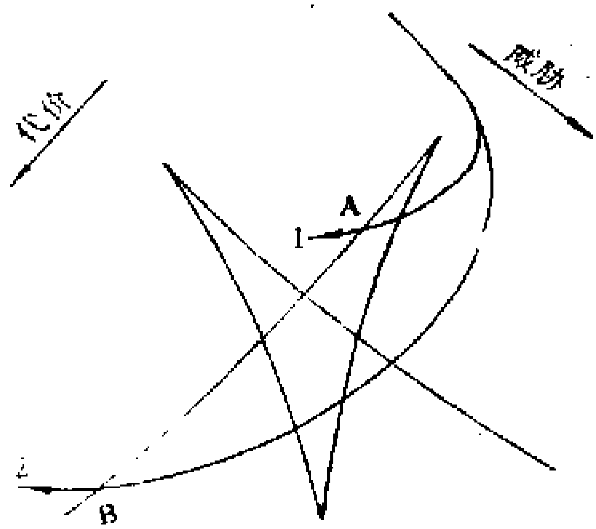


图4.36　达成妥协困难

蝶因子变成负的，于是中叶出现了。只要威胁与代价之间的平衡并不过分地偏向于一边，妥协就是可能的。中叶也变得越来越宽，故随着时间的推移，妥协不那么脆弱了，虽然还有其他变量的过分变化而使它有被破坏的危险。

这样一来，如象我们原来希望的那样，蝴蝶突变的两个附加因子使得我们可以应用我们的决策模型处理比较复杂的情祝。这个推广了的模型，除了提供过程的一幅有条理的图象外，它至少还有一个始料不及的特点，因此可能更为有趣，图4.30中标出的两条路径是某一个国家的可能控制轨迹，该国起初采取鹰派姿态（攻击性政策），而后则发现冲突的代价大为增高。如果代价的增高出现在相对较早的阶段，则会遵循路径1，在A点将由鹰派姿态转为妥协。这一政策的改变并非很富于戏剧性的，因为我们很接近于政策连续改变的区域。如果代价的增高只是在危险的水平已达到高得多以后才出现，则其结果是很不相同的，如路径2所表示的那样，这次在到达B点时政策才有值得注意的改变，尔后鹰派姿态并不为妥协姿态所取代，而是为鸽派姿态所取代。而按照我们的模型，一旦情况变得足够严重，妥协姿态是存在的，但是不可达的（请参阅第三章图3.10）。

这个预测主要是根据理想滞后惯例，它把系统保持在鹰派的极小值，而妥协时隐时现，故我们要问这个惯例是否会用？为此，可以考虑这对我们试图模拟的系统意味着什么，我们正在研究一个国家的政府，假定它正以自己对威胁和代价的估计，以及带着它自己的偏见和成见，试图确定它要遵循的最优政策，理想滞后惯例指出系统将停留在一个较小的局部极小值处直到这个极小值消失，即使还有一个较小的

极小值亦然，用模型的语言来说，就是政府对形势改变所作出的反应只是政策上的小变动，即使在政策上作较为决定性的改变就可以达到按自己的标准更为可取的处境，它也不会那样做，除非它发现自己的处境已完全不能维持下去了。

因此，我们的模型指出，在某种环境下，一个缺乏远见的政府也许不能达成较明智的政治家有可能达成的那种妥协，这一点从前也有人想到过，因而它并不是一种新的预测，但它却是未被明显地嵌入到模型中的一种预测。

如果这个模型是正确的，幸好还有许多别的惯例可以用来代替理想滞后惯例。例如麦克斯韦尔惯例，根据这个惯例，系统将寻找势函数的全局极小值。在我们的模型中，这相应于一个有想象力的政府，它能够抓住改变政策的有利时机，并有实现这种改变的信心和政治手段。这个期望也许是过高了，但转为现实的可供选择的惯例也可能是非理想滞后，具有这种惯例的政府也许不会立即采取更好的政策，但至少不会等待到没有选择的余地时才做。

另一种可能是：政府或若干有关人员偏爱某种政策，因而才倾向于采用这些政策，这种类型的行为，即在稳定状态之间的选择是根据在系统之内但在模型之外的标准作出，不能想象可在简单系统中遇到，而更有可能会在高度复杂的系统（如大脑）中遇到，其中包含着相互作用的子系统。

最后，稳定状态的选择可由某些完全在系统之外的因素作出，如设想一支维护和平的力量被派去迫使交战双方停止敌对行动，这样的例子在世界上并不少见，这个模型预测：设控制轨迹在中叶下的区域中（即设哪一方考虑威胁和成本都不太过分），仲裁人可以在短期以后放心地撤离。如果情

况并非如此，一旦他们离开，停战就会被破坏。

利用突变理论可以描述的社会突变现象还有很多，如可以用尖点型突变描述的：用“经济收益”与“人口密度”来解释古代某些城市的突然兴亡，从心理学上提高儿童的学习兴趣；也可以用犯人的“紧张心理”和“孤独感”的变化来解释监狱中的暴乱与平静局面的出现。国外还有人用突变理论在心理范围内研究诸如爱和恨的突变现象，预测股票市场因投机因素的影响是否会出现股票突然崩溃，蜜蜂的社会行为；大都市模型及城市发展模式的选择等等，不一而足。

研究了突变理论在社会科学中应用例子以后，我们发现突变理论在社会科学中所提供的应用，首先是比喻，虽然有时很难使人相信它的真实价值，然而，重要的是要注意突变理论提供的决不仅仅是比喻：第一，突变理论中的那些曲面并非随意画成，也不是用来拟合特殊情况的经验结构。相反地，它们是在力求简单和结构稳定的基础上选取的，我们不能肯定突变理论可用于任何个别的情况，但它是一种有用的工作假设；第二，突变理论在社会科学方面所提供的基本上是一种启发式的模型，它的优点在于它总是把发生其他变化的可能性提示给社会科学家们，因为突变模型中，这些变化是做为一个整体的各个侧面出现的。这种模型无疑会使人们加深思考，从而达到解释，预见，进而预防，控制某些突变现象的发生。

我们来浅谈一下预见突变的基本方法，在第三章我们介绍了七种典型突变，我们可以把各种突变现象按照典型突变加以分类，如果两个突变现象同属一类，它们之间就有某种内在联系。如果其中一个典型突变表现出某一特征，人们就有

理由期望另一个非典型的突变也具有此特征性质，并且将要表现出这一特征。当然我们还可以据此而预言，某些其他类型的突变不可能出现，这就是预见突变的基本方法。

那么如何判断一个没有数学描述可言的非典型的突变是属于那一类突变呢？第二章里我们已经说过，人脑可以利用拓扑变换把大部分生物加以分类，类似的理论可以解释为什么人脑能识别几乎所有的人形，而不致于错把人看成是其他的东西，人脑能够把各种特殊的人体形态经过拓扑变换（胶皮膜变形）还原成一标准的、典型的人形，一个概念中的人形。但是社会科学领域中的许多突变现象根本不能形象地画在一张胶皮膜上让我们变成典型突变，例如社会骚乱、战争、危机等等。突变这个词不是指微小的波动（对微小波动的研究是概率论的任务），而是指巨大的、有决定意义的突然变动，造成这一变动的原因不应当用某些偶然因素来解释，这是突变理论的基本思想之一．既然是巨大而突然的变动，其特征一定是极其明显的。明显到无需乎任何详细的定量分析，单凭人的体验就能感受到并且留下深刻的印象。不仅如此，人脑敏锐的感知能力还能分辨出突变的一些具体特征，如第三章已说过的，突变的原因消失之后，突变的结果仍会持续，要想做一次逆向的突变就需要比原有突变更强烈的动因，我们知道，这叫做“滞后”；有些突变现象是不可重复的，我们说过，这叫“发散”；此外还有“双模态”、“不可达性”等等，人们可以按照所体验到的那些特征把突变现象归入到某一个类中去，只要该类的典型突变也具有这些特征，这是一种类比的方法。这是一种假设，一种很强的假设，单凭着几个感觉上的特征就假定这个突变现象具有与某

一典型突变相似的数学模型。由于使用了类比方法，使突变理论因此而获得了远比其他数学方法广泛得多和有希望得多的双份的应用价值，即在自然科学和社会科学领域中都能应用的价值。

§ 4.10 突变理论在经济决策中的应用

经济决策过程虽然很复杂，但是一个有远见卓识的或有经验的决策者所需要考虑的不是那些因素众多、头绪紛乱的原始情况；而是在信息与预测的基础上，特别是在图 4.37所示典型信息分布曲线的基础上作出初步决策，然后再进行局部修正或者说对各次要因素所占的比重赋予一个相应的权重系数，用以表示该因素对决策过程所占重要性大小的度量。

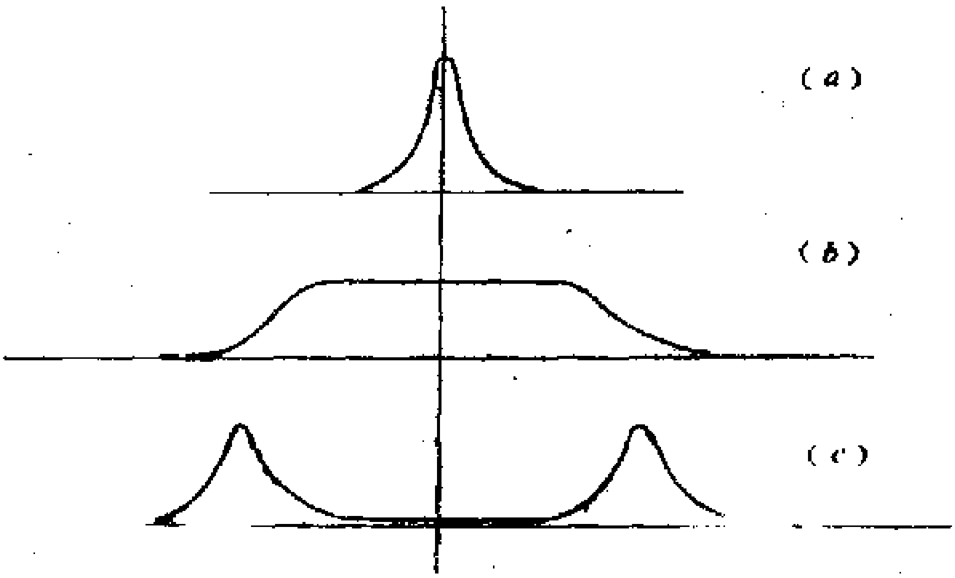


图4.37

下面将从图4.37(c)的分级信息分布和突变理论来讨论经济决策过程和建立决策的动态模型。

图4.37是将瞬息万变、种类繁多的信息（是经济的信息）归结为三种类型：图4.37中的(a)为中心型单峰值分布，(b)为平滑的过渡型宽带分布，(c)为分级双峰值分布。这三种分布可以通过概率分布函数进行计算，在计算时可以根据具体情况作一些简化、假设。例如，当信息所包涵的实际内容是社会舆论或对某种政策的支持和反对态度，或者对某一资源开发利用的赞成与反对意见，或者某种产品投放市场后用户所持的态度是欢迎还是不欢迎，等等。这时均可以假定个人意见的改变随着持相反意见人数的增多而加强，随着持相同意见人数的增多而减弱，社会形势可以促进或阻止某种意见的变化，当然还可以考虑各种外来影响，经过大量统计资料的分析，可以假定信息的概率服从指数规律，因此可以计算出具体的分布曲线形状。

因为图4.37(c)可以代表任何两种对立的信息，例如在战争环境下的鹰派与鸽派，投资与反对投资，进攻与退却，风险与保守等等。现在把它们当作决策过程中的控制因子，显然图4.37(c)有两个对立的或相互冲突的控制因子，分别用u与v表示，那么决策结果作为状态变量，在最简单的情况下，图4.37(c)的决策就归结为单变量的两个参数(u, v)决策过程，它可以用一面一个十分简单的势函数表示：

$$V(x) = x^4 + ux^2 + vx$$

当控制因子u与v连续变化时，$V(x)$就代表了状态变量所经历的轨迹。它是一个形状特殊的曲面，图4.38就是在u与v变化时画出的，曲面有一个折迭部分，它在u与v控制平

面上的投影称作分支集，将u-v控制平面分为两个不同的区域，分支集内部与折迭曲面相对应，分支集外部与状态曲面的顶叶、底叶相对应。现在来说明图4.38在决策过程中的具体意义。

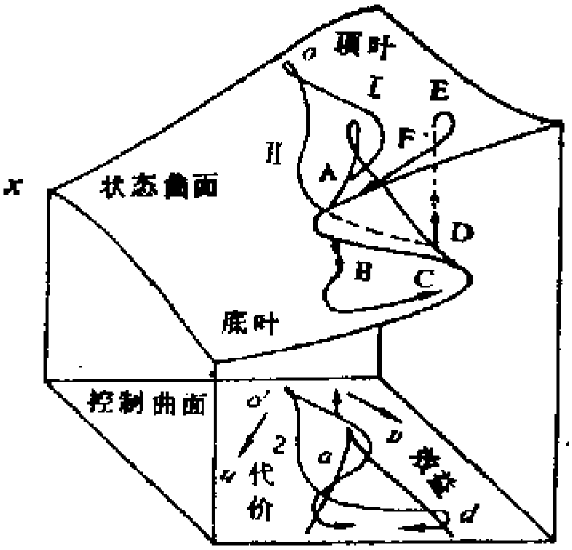


图4.38

以投资的决策为例，这时相互对立的控制变量u与v分别代表"风险或代价"及"获利或效益"，而状态变量x则代表了决策结果。按照通常的情况，对某一投资所作的决策可分成三种结果：积极投资，拒绝投资，中立(犹豫不决)。现在分析一下"代价"u与"效益"v在连续变化过程中决策的变化情形，分下面三种情况：

1. 代价很低而效益较高。决策者很容易作出"积极投资"的决策，因为在这种情况下可以用很低的代价获取很高的效益，因此在图4.38中决策过程由路径Ⅰ表示，它在控制平面上的投影曲线为1。随着市场形势的发展变化，为获取较

高的效益将要付出愈来愈高的代价，这时路径Ⅰ将沿着空间曲面的顶叶向折迭曲线边缘移动，到达A点时发生突跳，进入底叶曲面，这表示从积极投资到停止继续投资的决策转变。倘若此后出现效益回升而代价降低的趋势或新情况，决策者必然对投资重新表现出热情，不过他需要一定的时间来调查经济市场的形势并谨慎、缓慢地向新的投资过渡，在图4.38中就相当于路径Ⅰ在底叶沿BC方向移动，一旦越过折迭曲面的边缘后，就会突跳到顶叶，这就是表示新的投资决策。

2. 代价很高而效益较低。在这种情况之下，整个决策过程将按照路径Ⅱ进行。起初在空间状态曲面上从O点出发的决策沿路径Ⅱ进入底叶，表示决策者持保守的态度，不愿意冒很大风险去获得甚微的效益，也就是说决策的结果是拒绝投资。随着经济形势的发展，决策会发现，一旦出现新的转机，即代价降低而效益提高的形势，决策者的远见卓识将保证决策过程沿曲线Ⅱ从底叶向折迭曲面边缘推进，到达D点时发生突变，路径突跳到顶叶的E点，这表示从拒绝投资转变为积极投资的决策。如果形势不变，则投资的政策就继续保持，否则就沿EF路径变化。

3. 代价与效益对等。当然这里所谓对等的意思是代价与效益都不具有明显的优势。决策者必定处于犹豫不决的状态，持中立态度，等待形势的发展，以使情况明朗化。这种状态不能用图4.38的模型来解释，因为中叶折迭曲面是不可达的，这个模型是以图4.37（c）的分级信息分布为基础的，不可能有中间状态。可见，为了描述中间状态，还需要对模型作一些修改。

首先，需要引入一个新的控制因素来衡量代价与效益之间微小的区别或偏倚程度。即使是对等的情况，对不同决策者来说，他总有一定的倾向性，或者对代价估计较高；或者对效益估计过高，引入偏倚因子正好能反映这个情况，偏倚因子用W表示。

其次，中立态度的建立或丧失都与时间有关。代价与效益平衡的局面只能靠时间的推延而变化，一般说来，经过一段时间就可以观察到代价与效益之间出现的变化，如果没有变化，中立态度则可以维持。因此，时间t也是一个控制变量，而决策结果仍为三种不同情况。与前面的模型不同，现在考虑到中立状态的模型是增加两个新参量，模型的空间曲面出现了第三叶，其数学表示式如下：

$$V(x)=x^6+tx^4+wx^3+ux^2+vx$$

对给定的t、w、u和v值，可以画出$V(x)$的空间状态曲面，如图4.39所示。

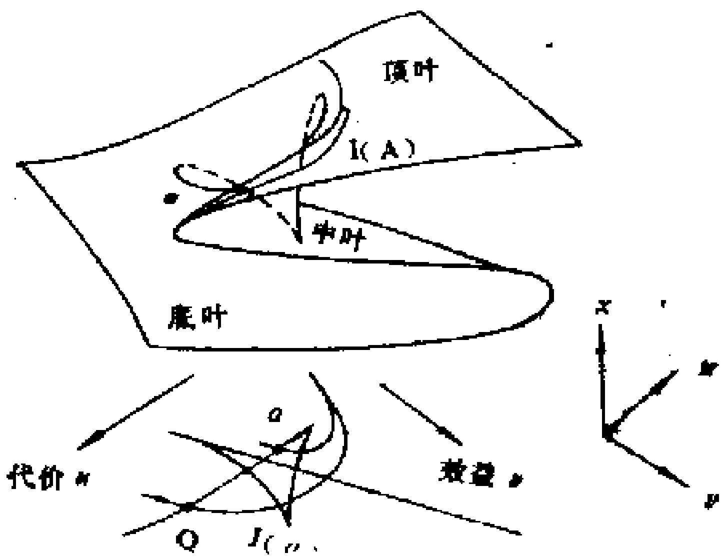


图4.39

当代价与效益的平衡并不明显地偏向某一方面时，中立情况是可以出现和维持的，中叶曲面代表中立状态。根据已获得的信息和由此作出的预测，可以对t、w、u和v这四个参数进行统计学的计算，从而画出模型的具体几何形状。

从图4.39可知，当代价的增长在经济形势的初期出现时，决策轨迹如路径 I 所示，在与分支集曲线的交点a处发生决策的转变，从积极的投资转变为维持最低限度的投资，这相当于决策迹线从顶叶跳变到中叶，说明这时的政策是中立的，维持现状的政策；当代价的增长出现在较晚期，则决策遵循图4.39中 I (a) 的路径，在Q点发生决策转变，从积极投资转变到中止投资，这又与图4.38相似。

显然图4.39的模型比图4.38要复杂，它的控制变量有四个，状态变量仍是一个，这一模型能适应范围很广的各种决策过程。

这个模型还有两个值得特别注意的特点，这就是滞后与发散，分别示于图4.40和图4.41。滞后说明从决策A转变为决策B与从决策B转变到决策A并不沿同一路径实现。例如商

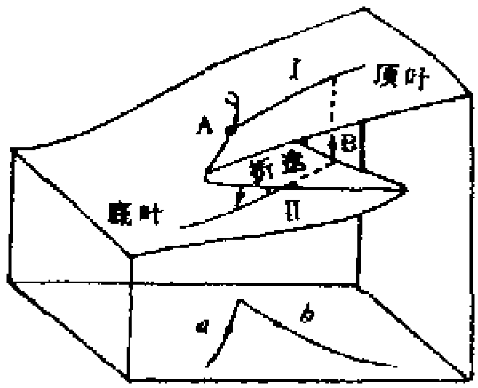


图4.40

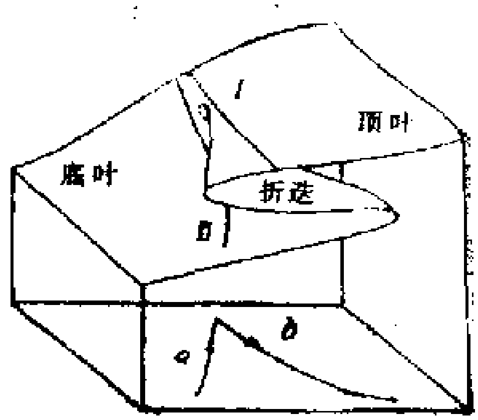


图4.41

品价格的调整，若某一商品升价，它可能影响有关商品也调整价格，当该商品再降低后，其他升价或调价的商品不会随之也调价，即便如此，也需要经过一段时间。

其次是发散特点，这与决策者的个人因素，提供的信息与预测，以及背景情况和初始形势等有关，发散说明在条件基本相同时，两个不同的决策者可能作出完全相反的决策，也就是说从状态曲面上O点出发的两条相互靠近的决策路径在折迭曲面尖顶V处分叉，路径Ⅰ进入顶叶，而路径Ⅱ进入底叶，分别代表对立的决策结果。

如果将投资的例子改换成关于战争的决策或关于其他政策制定的决策，也同样有上面讨论的三种基本情况，感兴趣的读者可以在这些方面进行研究。

尖点型突变模型在小汽车发展高潮期的预报是突变理论在社会经济系统中应用的成功的一例。

在社会经济系统分析中，建立突变模型通常是比较困难的，主要难点在于不易建立一个高次方程，准确地描述客观事物的发展。社会经济系统是大量随机变量和随机过程的综合，通常只能用统计方法建模。这里采用这两种方法的特点，综合解决突变理论建模的问题。

首先，对尖点型突变模型作如下的改造：

$$(a-y)^3+p(a-y)+q=0$$

$$P=P(a)$$

$$q=q(u,v,\cdots)$$

$$a=f(v,d)$$

当固定某一a值时，$P(a)$也随之得到固定。于是，状态变量y为q的函数。函数的图形在此略。

$(y_3, -\bar{q})$和$(y_1, \bar{q})$称为分歧点。$\bar{q}>0$称为临界值。

由（1）式，令

$$\Lambda = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

分歧点集对应于$\Delta=0$，此时，其实根为

$$y_1 = a - \sqrt[3]{\frac{\bar{q}}{2}}$$

$$y_2 = a + 2\sqrt[3]{\frac{\bar{q}}{2}}$$

$$y_3 = a + \sqrt[3]{\frac{\bar{q}}{2}}$$

$$y_4 = a - 2\sqrt[3]{\frac{\bar{q}}{2}}$$

突变是一个过程，当$q<0$增加到$q>0$并夸越$-\bar{q}$和$\bar{q}$临界区时，y值经过的路线为$y_4 \to y_1 \to y_2$，y_4到y_2称为双模态区，$y_1 \to y_2$为跳跃即突变。当$q>0$减少到$q<0$并夸越$\bar{q}$和$\bar{q}$临界区时，y值经过的路线为$y_2 \to y_3 \to y_4$，$y_2 \to y_3$为双模态区，$y_3 \to y_4$为跳跃即突变。

对于双模态区，即$\Delta<0$或$(-\bar{q}, \bar{q})$区域，y有三个实数解，即

$$y_a = a - 2\sqrt[3]{S}\cos\theta$$

$$y_b = a - 2\sqrt[3]{S}\cos(\theta + 120^\circ)$$

$$y_c = a - 2\sqrt[3]{S}\cos(\theta + 240^\circ)$$

$$S = \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}, \quad \theta = \frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2s}\right)$$

由于双模态区的特性不易掌握，所以对于实际的社会经

济系统，我们宁愿认为突变是一个过程，可能并不严格遵循$y_4 \to y_1 \to y_2$或$y_2 \to y_3 \to y_4$的路线，写为$y_4 \sim\to y_2$或$y_2 \sim\to y_4$可能更为确切。从某种意义上看，这应该是突变概念在社会经济领域的一个推广．称为广义的突变概念。

对于$\Delta>0$区域，即$q\in(-\infty,-\overline{q})$和$q\in(\overline{q},+\infty)$区域

$$y=a-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

属于渐变的阶段。

对于任一个$P<0$来说，从$y_4 \sim\to y_2$或从$y_2 \sim\to y_4$，突变幅度均为$4\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$。

在$P=0$时，$\overline{q}=0$，即不存在突变。因此，只要使控制变量$P=0$，便可避开突变。

在交通问题中。小汽车拥有量的预测是一个十分敏感的问题，关系到交通政策的全局，影响长远交通发展规划，牵涉到人民消费结构和国家经济发展。这里面要提出和解决的问题有：1)是否必然存在小汽车购买高潮？2)如果存在的话，在什么条件下出现？出现的势头如何？3)政策的影响如何？

这些问题显然必须从实际调查入手，从全世界各国已经发生的情况进行分析。采用“人均客车拥有量”作为状态变量y（单位为辆/千人）。发现了一个普遍的，几乎是无例外的规律，即y＝20，人均国民收入达到某一水平时，所有国家都出现一个购买小汽车的高潮，人均客车拥有量的年递增率达15％至30％。高潮一般持继6年左右，而在这个时期之外，年递增率很少有超过10％的，而且不出现持继高潮的特征。所以，从历史的眼光来看，我们称这个持继高潮期为突

变时期。令$y_4=20$，y_4对应于临界值$(p, -\overline{q})$；y_2 对应于临界值$(p, \overline{q})$。

对于尖点突变模型，对突变期（即$y_4 \sim\rightarrow y_2$或$y_2 \sim\rightarrow y_4$时期）的预报模型可写为

$$\begin{cases} (a-y)^3+\overline{p}(a-y)+q=0 \\ p=p(a) \\ \overline{q}=q(a) \\ a=f(r, d) \end{cases}$$

其中，变量间的关系为

$$a = \frac{1}{2}(y_4+y_2)$$

$$p = -\frac{3}{16}(y_2-y_4)^2 = -0.75(a-y_4)^2$$

$$q = -\frac{1}{32}(y_2-y_4)^3 = 0.25(a-y_4)^3$$

根据统计分析，引入人均国民收入r（单位：美元/人）为控制变量；d为政策控制变量。

定义

$$d = \begin{cases} 1 & \text{当采用鼓励发展小汽车的交通政策} \\ 0 & \text{当采用自由发展小汽车的交通政策} \\ -1 & \text{当采用严格限制小汽车发展的交通政策} \end{cases}$$

采用不同程度的鼓励政策用$d\in(0, 1)$。例如，对日本取$d=0.4$，西德取$d=0.9$（西德之所以采用较高的d值，是高速公路基础好，修建速度较快，可视为一种鼓励政策）；瑞典取$d=0.75$，荷兰取$d=0.25$，等等。

对于采用部分遏制小汽车发展政策的，可从$d\in(-1, 0)$

范围取值。例如，比利时取$d=-3.3$；东德取$d=-1$。

我们从国外几十个国家的资料中获得如下的模型：

$$a=0.0447788\cdot r+19.1038\cdot d$$

与实际相比是很接近的。这样，可以获得小汽车发展高潮期的通用预报模型，

$$\begin{cases}(a-y)^3-0.75(a-20)^2(a-y)+0.25(a-20)^3=0\\ a=0.0447788\cdot r+19.1038\cdot d\end{cases}$$

上式有许多用途，这里指出其中的两点：

1. 小汽车发展高潮期及其幅值的预测。

若某国某年的人均国民收入r为已知，则在不同的政策条件下，前三年达到的人均客车拥有量y_4和后三年人均客车拥有量y_2值可以预测，参见表1

由表1可见，如果采取严格的小汽车控制策略（取$d=-1$），则人均国民收入在1000美元时，小汽车虽有极大发展，还不致出现小汽车购买高潮。如采取部分控制小汽车发展政策（取$d=-0.4$），则人均国民收入在850美元时，便会出现小汽车购买高潮（年递增率持继保持15%以上）。如采用某种鼓励政策，如加快公路的修建，有效降低汽车能耗等（相当于$d=0.5$），则人均国民收入为500美元时，便可出现小汽车购买高潮。小汽车高潮的出现，标志着该国从货运为主的交通体系转化为以客运为主的交通体系，公路运输量会迅速增加，这对交通发展规划来说，是一个十分重要的阶段。

2. 政策研究

对于这个问题的尖点型突变模型，实际上是势函数

$$V(y)=(a-y)^4+p(a-y)^2+q(a-y)$$

的平衡曲面上，对应于分歧点集的一个三维区域。而$y_4(a)$，

小汽车发展高潮期及其幅值预测 **表 1**

人均国民收入 r	交通政策 d	y_1（辆/千人）	y_2（辆/千人）	去年中年递增率（%）	备 注
500	−1	—	—	—	不产生突变
	0	20	27.9	5.7	
	+0.5	20	47.0	15.3	
	+1	20	63.1	22.0	
600	−1	—	—	—	不产生突变
	0	20	37.5	11.0	
	+1	20	75.7	24.8	
700	−1	—	—	—	不产生突变
	0	20	47.0	15.3	
	+1	20	85.2	27.3	
800	−1	—	—	—	不产生突变
	−0.25	20	47.1	15.3	
	0	20	56.6	18.9	
	1	20	94.8	29.6	
950	−0.4	20	43.0	15.0	
900	−1	20	28.0	5.8	
	0	20	66.2	22.0	
	+1	20	104.4	31.7	
1000	−1	20	37.6	11.0	
	0	20	75.8	24.9	
	+1	20	113.0	33.6	

$y_2(\alpha)$两条曲线便是对应于分歧点$-\overline{q}$和$\overline{q}$的，该三维区域的边界。从$-\overline{q}$经过阴影区达到$\overline{q}$，称为突变。但如果采取另外的路线，使$p=0$，使不产生突变。因此，我们称之为不产

生突变的政策临界值，记为d^*。按本节的模型，可以求得对于每个r，避开突变所采取的d^*，见表2

按我们的规定，$d=-1$表示严格的限制小汽车发展政策。从表2中看出，当人均国民收入r超过850美元时，从政策上完全限制小汽车的发展是不可能的，也是不可取的。

政策临界值　　表2

r（美元/人）	d^*
500	—0.20
600	—0.45
700	—0.70
800	—0.95
850	—1.08
900	—1.20
1000	—1.45

§4.11 突变理论在探讨体育运动能力中的应用

在体育运动中，存在着三种运动变化形式，第一种是连继变化，第二种是不连继变化，第三种是介于连继变化和不连续变化之间。对于第一种变化过程，可以用微分方程来进行描述；对于第二种变化过程，可以用概率论和离散数学来解决；对于第三种变化过程，即不能用微分方程来描述，又不能用概率论的方法来解决，但是这一类变化在体育科学中是经常碰到的。

运动能力是体育科学中经常探讨研究的一个问题，它主要是取决于身体素质和运动技术两方面，必备什么样的身体素质和运动技术，才有利于运动能力的发展？也就是说，能不能对体育运动能力进行定量化测定，并借助一定的数学工具，建立体育运动能力的数学模型？

下面我们运用突变理论来分析体育运动能力的发展过程。假定系统在任何时刻的状态都可完全地由给定n个变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的值来确定，这里n是有限的，而且系统又受到m个独立变量$(u_1, u_2, \cdots, u_m)$的控制，即这些变量的值决定了x_i的值，将x叫做状态变量，u_i叫做控制变量。如果把身体素质和运动技术看作两个控制变量，把运动能力看作状态变量，就可以建立一个体育运动能力的突变模型。

在突变理论中，当控制变量为两个时，最简单的突变模型是尖点型，下面就用这种模型来分析。如图4.42所示，曲

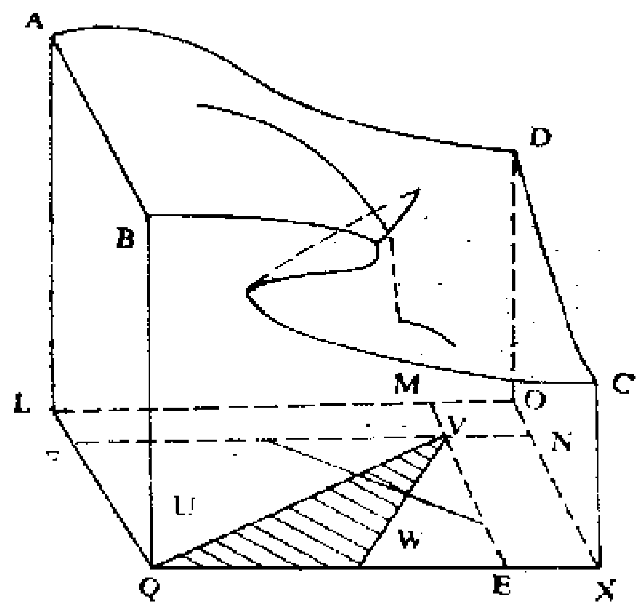


图4.42

面$ABCD$是一个折叠的曲面，称作行为曲面；OL轴称为身体素质水平轴；人的身体素质水平的发展可以看作是连续变化的（是年龄特征、训练和培养的函数）；OX轴称为运动技术水平轴，人的运动技术水平的发展也可以看作是一个连续的变量（它也是年龄特征和训练培养的函数）。曲面上的各点对应着不同的身体素质水平和运动技术水平下所决定的运动能力。曲面上的上半叶代表运动能力的飞跃突变阶段以后，体育运动能力急速增长。而上半叶与下半叶之间不连续的突变区，则可以称作为运动能力突变区，曲面$ABCD$中的折叠区在底面$OLQX$上的投影是一个尖角形的区域UVW，所以这个模型称为尖点型突变模型。

当身体素质水平和运动技术水平都比较差时，是根本不可能产生良好的体育运动能力。从突变模型上来看，出现良好的体育运动能力所必须具有的身体素质水平和运动技术水平的阈值，在OL及OX轴，截距点分别为M点与N点，与底平面中的小平行四边形$MONV$相对应的曲面，就是不发生折叠的部分。这相当于不健康人的运动能力发展的情况，一个长时期不能提高运动能力的运动员，也与此类相似。

从模型中可以看到，不论是运动员创出优异成绩还是作出高难度动作，都需要有良好的身体素质和较高的运动技术的配合才行。也就是说，即使一个运动员运动技术水平再高，但只要他的身体素质水平只在阈值OM以下，就不可能具有良好的体育运动能力，这种情况，相当于底平面中四边形$MOXE$所对应的曲面情况，这时曲面也没有折叠部分。同样地，除了要有运动技术水平外，还需要有一定的身体素质水平，即要超过OX轴上的阈值点N。否则，再强的身体素

质也是不能得出良好的运动能力。

只有当一个人的身体素质水平超过阈值点M，他的相应的运动技术水平超过阈值点N时，他才真正有可能有良好的体育运动能力，即有运动能力突变的可能。UVW 这个三角区表明了一个人的运动能力的大小与身体素质水平及运动能力水平的最佳比例。当一个人的身体素质水平超过阈值点M，而他的运动技术水平较高时，他的运动能力必有突变性，容易在训练中提高成绩。

由此可知，对良好的体育运动能力的形成来说，M点与N点是十分重要的关节点，或者说，由M点，N点的值决定了一个势函数的x_0值，由于训练水平的限制，当人在训练中产生的运动能力不能突破势函数x_0值的束缚时，不能产生良好的体育运动能力。

对不同的人来说，势函数x_0的值是不同的，但对于从事同一个运动项目的人来说，他们又有大致相似的势函数表达式。通过培养训练的作用，可以有效地调节控制变量——身体素质与运动技术水平的发展，从而改变势函数的位置与形状，引起状态变量的改变。这就是对具有较高运动能力的人的培养。

第五章　突变理论的现状和未来

托姆的突变理论发表以后，在国际数学界引起了激烈的争论，议论纷纷，褒贬不一，赞扬的人，把突变理论捧上了“天”，认为是“继牛顿、莱布尼兹以来的最大的发现，是数学中的又一次智力革命”。“是用精确数学工具描述生物学、社会科学等复杂现象的一次突破”。1977年，有名的《大英百科全书》更写道：“突变理论使人类有了战胜愚昧无知的珍贵武器，获得了一种观察宇宙万物的深奥见解”。似乎突变理论是万能的，可以“包医百病”。显而易见，是过分夸大了突变理论的作用。因而客观世界是很复杂的，而变化又是多样的，世界上从来就没有过尽善尽美天衣无缝的理论。

也有人对突变理论猛烈地加以抨击，甚至千方百计地力图贬低，说什么突变理论是滥用数学理论，应用是靠不住的，是假的，有人提出：突变理论所说的不连续现象，其实可以用连续方法来解决，微分方程研究激波就是一个例子，量子力学也是处理不连续现象的，但都与突变理论无关。对第四章我们所述的狗的进攻模型，则有人批评说：“狗的愤怒与恐惧根本就不可以数量化，预测一只愤怒的狗会掉头逃跑是愚蠢的，而预测一只恐惧的狗会咬人也是无意义的；有人在分析突变理论为什么会受欢迎的原因时说：“突变理论披着抽象数学的外衣，一些实际工作者由于相信数学的严格

可靠性而相信它，而一些数学工作者想把突变理论用于实际，但又不惜所要应用的学科的本质，因而陶醉于这种廉价的似是而非的东西”，更有甚者，竟有人批评突变理论是华而不实，说它是欺世盗名的；还有人借用安徒生童话《皇帝的新衣》讽刺突变理论是没有穿衣服的皇帝，是一场骗局，如此等等。

众所周知，托姆在拓扑学研究方面有卓越的成就，称得上是一位拓扑大师，治学态度一向严谨、认真，而且支持他的理论的人，还有许多是著名的科学家和大学教授，如齐曼，斯图瓦尔特(Stewart)，桑德斯等人，难道这是骗人的吗？可是读一读那些批评文章，又觉得似乎不无道理，在数学这样一门以严谨著称的科学领域中，竟然出现了一场激烈的争论，确实比较少见，因而引起许多人的兴趣和重视。

那么突变理论到底是怎么回事？我们在前面几章已经做了粗浅介绍。我们认为上述褒贬都是偏颇之论，任何一种意见都不一定符合实际。

我们在前面说过，突变理论的数学基础比较雄厚，扎实和艰深，托姆在这方面做了大量的、可贵的研究工作，是无疵可击的。突变理论作为一种纯粹数学理论的正确性和重要性是不能否定的，因为自然界和人类社会中作为不连续过程的突变事物、突然变化的现象毕竟是存在的，不仅值得研究，而且是摆在科学工作者，特别是数学工作者面前的一项重要任务。突变理论的出现，受到人们的欢迎和重视，是理所当然的。一般来说，人们对托姆的突变论中所作的数学研究并不反对，且给予高度评价，认为是了不起的成就。但对突变理论的应用，有不同意见，归纳起来，争论的焦点是突变

理论对社会突变现象还不能做定量的描述，这是事实。直到现在还没有任何人能对社会的突变现象写出定量的描述，只凭个人的体验与感受到的一些特征把突变现象归入到某类型的突变中去，有些地方不无牵强附会，特别是用于社会突变现象的描述，更难免主观臆测，很难令人相信。但我们认为突变理论是一种新的理论，是一种拓扑理论，从而对社会的突变现象能直接得到定性的理论，这就是一种突破，一种破天荒的成就，但是它当然不是具有这种性质的唯一理论，更不是处理不连续现象的唯一理论（见第二章所述），但从以上第三、四各章举的例子，我们可以看到，突变理论应用之广泛，方法之奇特，是一般数学所无法比拟的。

突变理论从诞生到现在，才不过十几个年头的光景，它毕竟还是一门年轻的新兴学科，在理论上不够成熟，在应用上存在这样或那样的一些不足和特点，都不足为奇；然而这也正是我们应继续研究和克服的。突变理论目前可说还只是处于探索应用它的技巧的初创阶段。自1972年，托姆的第一本专著发表以来，有关突变理论的文献迅速增加，据不完全统计已达400多篇，它的作用尚未充分发挥，潜力很大，突变理论的研究工作现在仍然很活跃。1981年在纽约召开了城市现象的突变理论国际会议，日本突变理论专家野口宏教授于1980年开始给东京大学和早稻田大学工学部学生讲授突变理论。日本还有另外一些大学开设突变理论的选修课；英国瓦维克大学数学研究所齐曼教授和斯图瓦尔特(Stewart) 教授合编的《突变理论及其应用》专著已由野口宏译成日文出版，七十年代中期一度兴起的“突变热”并未冷却。目前，突变理论的文献有增无已，其总题目称为《拓扑动力学和分

歧理论》．分歧理论是微分方程定性理论的一个主要研究方向．拓扑动力学则是用拓扑学方法研究微分方程的学科。对于一般的读者，只要把这两门学科与“奇点”和“胶皮膜”联系起来理解就可以了。

尽管突变理论可以解释大量突变现象，也可以按照类比的方法预见某些突变，但是到目前为止，它却不能帮助我们控制突变，原因很简单，突变是一种质变，并且是当量变达到一定的限度时发生的质变，控制突变就是把握住事物的“度”，在不能做定量分析的条件下，这是难能做到的事情。

寻找具有定量分析功能的某种方法，这是突变理论向社会科学领域渗透所必须解决的问题，我们创立或接受一种新理论，不是由于它用一套新的概念重新解释了老的事实，而是由于从这个新的角度解释了老的事实之后，还能进一步获得一些新的知识，用这些新的知识我们能解决新的问题。只是在这一步之后，新理论才可能站住脚跟，才不致在百花争艳的科学园地里被淘汰。

在科学历史的长河中，任何一种新理论的诞生，一项新发现的问世，都往往伴随着激烈的争论，例如十九世纪俄罗斯数学家，喀山大学教授罗巴切夫斯基所创主的非欧几何学引起了许多人激烈反对。微积分的创立，也引起了一些人的抨击，鼎鼎大名的爱尔兰唯心论哲学家贝克莱(Berkeley)就是其中的一个，正确的批评是有益的，随意否定是不利于科学发展的，今天有些人对突变理论的抨击，这是一件好事，可以活跃学术空气，繁荣科学事业，托姆本人是一位学有专长的著名数学家，但他对自己的研究成果总是一分为二，实

事求是。实践是检验真理的唯一标准，突变理论作为一种新的数学理论，其前途如何，当然应当受到实践的检验，正如一位突变理论工作者所预言的那样："突变理论究竟能否被人们所接受，还要看今后十年内在实践中能否经得起检验。"

总之，现代科学日新月异，新鲜事物层出不穷，人们称突变理论是鲜花盛开的科学百花园中的一枝奇葩，它与比利时布鲁塞尔自由大学教授著名化学家普利高津的"耗散结构理论"，联邦德国斯图加特大学理论物理学家哈肯教授的"协同论"，构成今天的所谓"新三论"（虽然有人对新三论的提法有异议，但编者认为：为了说明这三项理论的光辉成就，这样称之也无不可，其实后面这两论都与突变论有联系），我们完全相信，随着对突变论研究工作的不断深入和应用范围的日益扩大，它将会成为数学中名符其实的新兴分支，而与微积分并光辉，在祖国科学的春天里，突变理论在祖国也将会大放光芒。因为它在中国有了良好的生长条件。

附录　拓扑学简介

突变理论是一种拓扑理论，为了使某些非数学专业或虽系数学专业而没有学过拓扑学的人便于阅读和理解突变理论，特做为附录，对拓扑学做一简单介绍。

拓扑学的英文是topology（有时也叫analysis situs），日本称为位相几何学，我国曾译为形势几何学，又译为连续几何学，1965年《数学名词》确定为拓扑学，它是Topology的译音，是几何图形经过一对一双方连续变换下而保持不变的性质的一个几何分支。什么是连续变换呢？举例来说，拉长或者压缩一张橡片膜，在橡皮膜上刻，画的图形就发生连续变换，如果这张橡皮膜没有破裂或折迭，图形的形状变了，但是图形的某些性质不变，如果原来曲线是闭合的，就仍旧闭合，原来两曲线相交的，就仍旧相交，拓扑学就是研究这些不变性质的几何学，是一种高水平的几何学，但拓扑学中的图形与一般的几何学中的图形是不一样的，拓扑学最感兴趣的是图形的位置而不是它的大小或形状。拓扑学中图形的大小和形状是可以改变的，犹如橡皮膜上的图形一样，可以拉伸或弯曲，因而又称为“橡皮膜上的几何学”或简称“橡皮几何学”，拓扑学中只注意连续函数，并把连续函数这个术语缩简为“映射”。

在人类生活的空间存在着三维图形，我们可以利用拓扑

学来研究这些图形，拓扑学上克莱茵(Klein)瓶就是一种最简单的闭曲面三维图形，它是一个不分里外面的曲面(图1)。

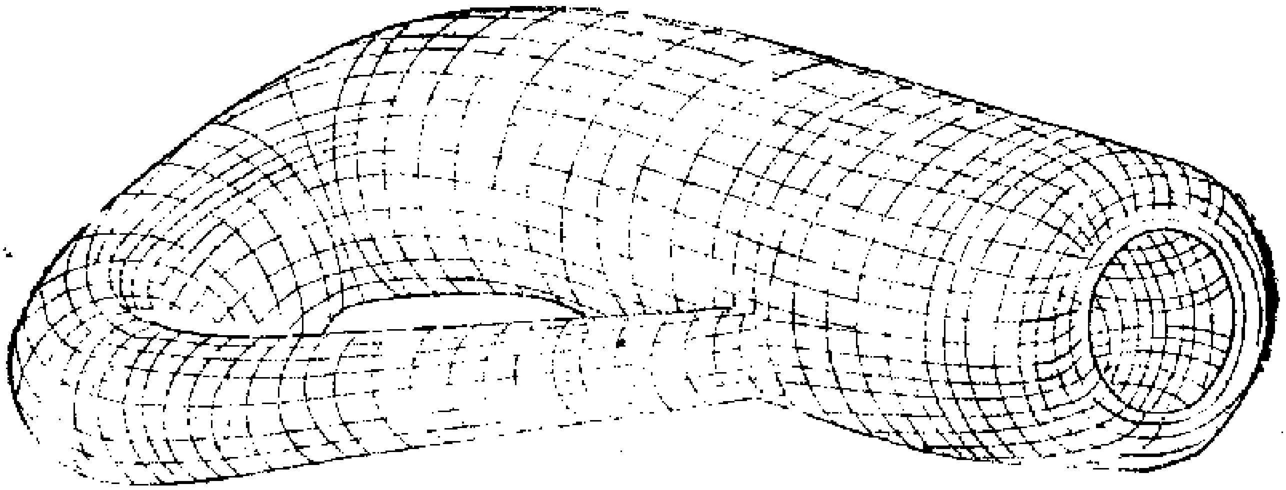


图1　克莱茵瓶(曲面)

我们可以用硬纸做眼镜框，镜框右边贴上红玻璃纸，左边贴上蓝玻璃纸做成一副眼镜，在距克莱茵照片30厘米观看，这时栩栩如生的主体图形就会展现在眼前。

拓扑学上的主体图形是无穷尽的，只要扩大决定曲面的函数就会作出各种各样的图形来。真可谓妙趣横生。

拓扑学起源于十九世纪，而能迅速成长发展成为数学的一个独立分支，还是近三十多年以来的事。早期的拓扑学明显地分为两类：一类是点集拓扑，也叫做集合论拓扑学或一般拓扑学，是以十九世纪德国数学家康托尔（Cantor）的点集理论为起点，在十九世纪九十年代法国数学家庞加莱(poincare′)研究高维积分理论，开创了拓扑学的第二个方面，叫做组合拓扑学或代数拓扑学，直到二十世纪初著名的荷兰数学家布劳尔(Brouwer)在维数概念的研究中，第一次

成功地建立了组合拓扑学与集合论拓扑学这两方面之间的结合，两支拓扑学有统一的趋势，后来又出现了微分拓扑学。

以上仅是对拓扑学的通俗解释，现在我们要进一步对拓扑学做一些说明，首先给出一些术语。

R^m表示m维欧氏空间，于是一个点$x\in R^m$，便是实数的一个m重组$x=(x_1,\cdots,x_m)$。

令X为R^m的一个子集，若对于X的子集U的每一点x，U包含x的在X中的某邻域，则称子集U为X的开集。凡邻域都是开集，X的子集A叫做X的一个闭集，如果A在X中的补集$X—A$是X的一个开集，简注A是闭集如果$X—A$是开集

设$U\subset R^m$, $V\subset R^n$都是开集，如果从U到V的映射（记为$f: U\to V$）的所有偏导数$\partial^n f/\partial x\lambda_i\cdots\cdots\partial x_{in}$。都存在且连续，则称$f$为光滑映射。

如果映射$f: X\to Y$与$g: Y\to Z$，都是光滑的，则复合映射$g\circ f: X\to Z$也是光滑的。

定义1 （紧致性）令X为R^m的一个子集，如果R^m的一些子集的并集包含X，这些子集所形成的族C，叫做X的一个覆盖，就是说，X的每一点至少在C的一个元素中。X的一个覆盖叫做有限的，如果C的元素的个数有限。X的一个覆盖C叫做包含X的一个覆盖D，如果D的每一元素也是C的一个元素。X的一个覆盖叫做X的一个开覆盖，如果覆盖的每一元素是X的一个开集，空间X叫做紧致的(compact)，如果X的每一个开覆盖包含X的一个有限覆盖，那就是说，能从X的开集的任何无穷族（其并集是X），挑选出一个有限的子族，其并集也是X，

例如，实数的任何一个闭区间$I=[a,b]$是紧致的，任何

m维盒子B是紧致的。

定义2 （连通性）空间X的一个分离是X的一对非空子集A与B，使$A\cup B=X$，$A\cap B=\phi$（空集），并且A与B都是X的开集，没有分离的空间叫做连通的(connected)。

例如，实数的一个闭区间是一个连通集，每条线段是一个连通集，每一个凸集是连通的。（R^m的一个子集叫做凸的，如果它包含它的每一对点的连接线段，例如，平面中一个圆的内部是凸的，而它的外部则不是）。

可以证明下列三个命题成立：

（1） 实数的一个闭区间是一紧致的连通集。

（2） 紧致集的连续象是紧致的，连通集的连续象是连通的。

（3） 实数的一个紧致并连通的集合是一闭区间。

定义3 （点集的拓扑性质）R^m的子集X的一种性质叫作拓扑性质(topological property)，如果它等价于一个利用X的开集的概念与集合论的一些标准概念（元素、子集、补集、并集、交集、有限集、无限集等等）来下定义的性质，简短地说，R^m的子集X的拓扑性质就是可以表达为X的开集族的性质的那一种性质。

紧致性和连通性都是拓扑性质。例如，一直线L是一连通集，而L的每一点在L中的补集不连通。换句话说，挖去直线的任一点，这直线就不连通了。平面的拓扑性质是：它连通，但不紧致，挖去它的任意有限个点，它并非不连通。

R^m的子集X的一种性质如果涉及到X或它的子集的诸如大小、形状、角度、长度、面积或体积等特性，它就不可能是拓扑性质。

定义4 （拓扑等价）R^m的子集X与R^n的子集Y叫作拓扑等价的(topological equivalence)或同胚(homeomorphism)的，如果存在一个一对一的函数f: $X \to Y$，使得f连续并且其反函数f^{-1}: $Y \to X$也连续。此外，这函数叫作拓扑等价或同胚。

例如，任两线段是相似的，并且相似变换是连续的，相似变换的反函数也是相似变换，从而任两线段是拓扑等价的（图2）。

设一质点连续地从一点p走到另一点q，描出一条不自交的曲线，这曲线与一线段拓扑等价（见图3）。

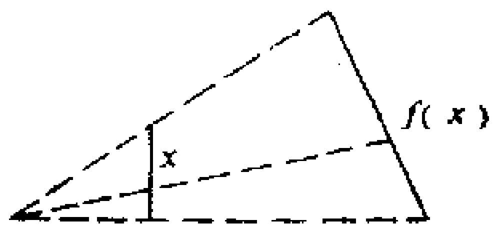


图2

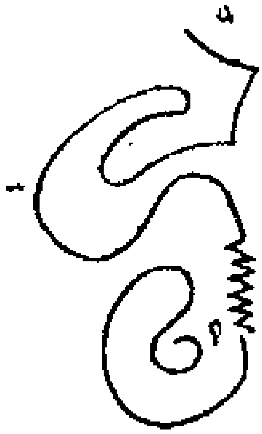


图3

定义5 （微分同胚）如果映射f: $X \to Y$将X同胚地变到Y上，并且f与f^{-1}都是光滑的，则称f为微分同胚（differential homeomorphism)。

已经说明了拓扑等价或同胚概念，我们现在返回来讨论拓扑性质，下面定理，说明了这两个概念的基本关系。

定理 如果R^m的一个子集X与R^n的一个子集Y拓扑等价，则X与Y这两个子集的每一个，有另一个所具有的每一种拓

扑性质。

这乃是显而易见的，因为一个拓扑等价或同胚$f: X\to Y$建立起两个集合的点之间的一一对应关系，与它们的子集之间的一一对应关系（因$A\subset X$，就有$f_A\subset Y$；又因$B\subset Y$，就有$f_B^{-1}\subset X$），这对应关系使得开集对应于开集，并保留集合论的关系与运算（例如在X中$A\subset B$，当且仅当在Y中$f_A\subset f_B$），对于有关X的点，X的子集，X的开集以及它们的集合论关系的任何真命题，如果把其中X的所有点与子集用它们在Y中的同胚象替换，所得到的关于Y的新命题自然也真。

我们用不连通这一性质来说明这论点。用开集来说，命题是：X有两个非空开集A与B，使得$A\cup B=X$与$A\cap B=\phi$，如果取f作用下的象并利用明显的关系，$f_x=Y$。$f\phi=\phi$，$f(A\cup B)=f_A\cup f_B$与$f(A\cap B)=f_A\cap f_B$，则得：Y有两非空开集f_A与f_B使得$f_A\cup f_B=Y$与$f_A\subset f_B=\phi$，故可不连通。

用以上定理来说明R^m的子集X的某些性质不是拓扑性质。因为一线段拓扑等价于任一别的线段，所以线段的长度不是拓扑性质，因为一线段与圆的一段弧等价，所以线段的平直不是拓扑性质，如此等等。

类似的，我们有

定义6 （函数的拓扑性质）设$f: X\to Y$是函数，其中$X\subset R^m$，$Y\subset R^n$，f的一个性质叫作拓扑性质，如果它等价于一种性质，其定义只用到X与Y的开集，象与原象，以及集合论的标准概念。

例如，连续性就是函数的一个拓扑性质，因为有一个定理说，函数$f: X\to Y$连续的充分必要条件是Y的每个开集的原象是X的一个开集，等价地，f连续的充分必要条件是Y的每

个闭集的原象是X的一个闭集。这容易找出函数的拓扑性质。另一个例子，f是一个常函数，这一性质是一拓扑性质。再有，对于每一点$y \in Y$，$f^{-1}y$是X的一个紧致子集，$f: Z \to Y$的这个性质是一个拓扑性质。

至此，我们就可以圆满地回答什么是“拓扑学”了，即

拓扑学是研究点集与函数的拓扑性质的学科。

前面说过，拓扑学又叫作橡皮几何学，如果要描绘与一特定点集X拓扑等价的那些点集，把X看成是用橡皮制成的，确是一种好的直观办法，如果把橡皮制成的X，这里拉长些，那里缩短些，并且扭弯一些（但决不撕裂开，也不把不同部分粘连起来），变形成点集Y，则X与Y是拓扑等价的，例如一个小球面（气球）能膨胀成一个大球面，它也能被挤压成一个椭球，还能挤压成一个哑铃形的表面，它还能让一个吹鼓了的球面收缩，直到它恰紧绷在一个长方形盒子或四面体表面（图4）。

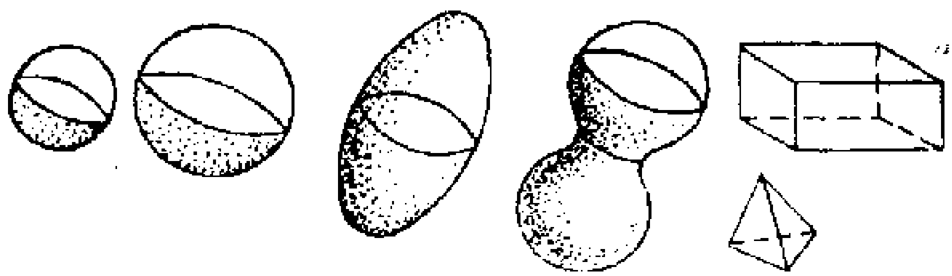


图4

因为两个拓扑等价的点集具有完全相同的拓扑性质，拓扑学者们把它们看成是相同的（从拓扑观点来看，无区别），这类似于欧氏几何学中把两个重合的图形看作是完全等价的观点，所以拓扑学者被人们称为不能区别出一个油炸面圈与咖

啡杯的数学家，图 5 表示一个实心油炸面圈变形成一个咖啡杯子的几个中间步骤。



图 5

最后，也可以粗略地说：

微分拓扑学是研究集合$X\subset R^m$在微分同胚下不变的性质的学科。

突变理论还需要用到流形的概念。

定义7 设$M\subset R^n$，如果每一点$x\in M$都有一个邻域$W\cap M$微分同胚于欧氏空间R^m的某一个开子集U，则称M为m维光滑流形，

任一特定的微分同胚$g: U\to W\cap M$都称为区域$W\cap M$的一个参数化（逆微分同胚g^{-1}：$W\cap M\to U$称为$W\cap M$上的一个坐标系）。

根据定义，如果每一个$x\in M$有一邻域$W\cap M$，由x独点组成，则M是零维流形。

限于篇幅及本书的性质，仅对附录作了一些粗浅的介绍，对此有兴趣的读者，请阅读专门的书籍，如点集拓扑（余立冰编译，北京师范大学出版社），一般拓扑学导引（李孝传、陈玉清编，人民教育出版社），拓扑学（浦保明等编，高等教育出版社）。

参 考 文 献

1. R. Thom, structural stability and Morphogenesis.(1975).
2. E. C. Zeeman, catastrophe Theory; Selected Paper(1972—1977)。
3. P. T. Saunders, An introducfion to catastrophe Theory. cambridge University press.(1980).
4. T. Poston, I. stewart, catasrophe Theoryits Applications, pitman(1978).
5. P. T.桑德斯著，凌多华译.突变理论入门.上海科学技术出版社，1983年。
6. 程不时．“突变理论及其应用”，科学通报，1978年，第9期。
7. 张奠宙．“不连续现象的数学模型——托姆的突变理论”．自然杂志，1980年，第10期。
8. 于水溪．“辩证论治与尖顶突变，”自然杂志，1981年，第8期。
9. 金观涛，华国凡．“突变理论和质量互变规律”，自然辩证法通讯，二卷四期1980年8月。
10. 金观涛．“突变理论与黑箱方法”，百科知识，1984年，第9期。
11. 汪丁丁．“突变理论的由来和前景”，百科知识，1984年第11期。
12. 郭卫中．“突变理论是现代数学的一个新领域”，东北师大学报，自然科学版，1984期第4期。
13. 赵子都．“一个新的数学分支——突变理论”，数学通报1986年第8期。
14. 张奠宙．“引起争论的突变理论”，光明日报，1978年7月。
15. 〔苏〕M.V.伏尔更斯坦著，龚少明译．现代物理学与生物学概论，复旦大学出版社，1985年。
16. 何平．体育应用数学，辽宁科学技术出版社，1985年。
17. 何平．“体育运动能力的突变理论”，辽宁体育科技，1985年第12期。
18. 胡传机主编．非平衡系统经济学导论，吉林人民出版社，1987年。
19. 翟连荣，李典谟，蓝仲雄．“突变论在生态系统分析中的应用”，系统工程，1987年第3期。